

The Canadian market for zero-coupon bonds

Le marché canadien des obligations coupon zéro

-
- *Unlike conventional bonds, which involve a number of coupon payments as well as the repayment of the principal at maturity, a zero-coupon bond has only a single payment at maturity.*
 - *Zero-coupon bonds do not have the reinvestment risk of conventional coupon-paying bonds. This is desirable for investors trying to match future cash flow obligations. Zero-coupon bonds also have different interest rate risk and tax considerations than conventional bonds.*
 - *A strip bond is a type of zero-coupon bond created by stripping coupon payments from conventional bonds. The strip bond market in Canada has grown substantially since the late 1980s and is now an integral part of Canadian fixed-income markets. As of November 1996, the value of strip bonds, as measured by the par value of the underlying conventional bond stripped by book entry through CDS, was approximately \$55.6 billion, with about \$19.1 billion or 34 per cent of the market consisting of stripped Government of Canada bonds.*
 - *Contrairement aux obligations classiques, qui sont assorties d'un certain nombre de coupons d'intérêt et dont le principal est remboursé à l'échéance, les obligations coupon zéro sont remboursées in fine.*
 - *Les obligations coupon zéro ne comportent pas le risque de réinvestissement associé aux obligations classiques, ce qui convient à des investisseurs cherchant à apparier leurs revenus et leurs engagements financiers futurs. Par ailleurs, le risque de taux et le traitement fiscal des obligations coupon zéro sont différents de ceux des obligations classiques.*
 - *Les obligations coupons détachés sont en quelque sorte des obligations coupon zéro qu'on crée en détachant des obligations classiques les coupons d'intérêt. Le marché des obligations coupons détachés s'est considérablement développé au Canada depuis les années 80 et il constitue maintenant un compartiment à part entière du marché canadien des titres à revenu fixe. En novembre 1996, l'encours des obligations coupons détachés, mesuré par la valeur nominale de l'obligation classique sous-jacente démembrée par inscription au compte de la CDS, était de 55,6 milliards de dollars environ, dont près de 19,1 milliards, soit 34 % du marché, concernaient des obligations coupons détachés du gouvernement canadien.*

Characteristics and pricing

A conventional bond is a debt instrument consisting of a series of periodic coupon payments plus the repayment of the principal at maturity. As the name suggests, a zero-coupon bond has no coupon payments. It has only a single payment consisting of the repayment of the principal at maturity. The zero-coupon bond is purchased by an investor at a discount to its face value and then redeemed for its face value at maturity. The return to the investor is the difference between the face value of the bond and its discounted purchase price.¹ The purchase price of a zero-coupon bond with a face value of \$100 would be calculated as follows:

$$\text{Purchase price} = 100/(1+y/2)^{2n}$$

where y = the semi-annual yield of the bond, and
 n = the number of years to maturity of the bond.

A zero-coupon bond is much like a Government of Canada treasury bill except that a zero-coupon bond may be issued with a maturity greater than one year. Zero-coupon bonds are also similar to other financial products, such as compound interest Canada Savings Bonds (CSBs) and compound interest Guaranteed Investment Certificates (GICs). All of these products have only the single payment at maturity, with no intermediate coupon or interest payments.

The yield on zero-coupon bonds is compounded on a semi-annual basis to maintain consistency with conventional Government of Canada bonds, which pay a semi-annual coupon. Semi-annual compounding is not the convention with treasury bills, CSBs, or for bonds in some other jurisdictions, notably Europe, where bonds pay interest only once a year.²

The Government of Canada does not issue zero-coupon bonds, nor do most other issuers in Canada. However, a type of zero-coupon bond known as a *stripped* zero-coupon bond is available from Canadian investment dealers. A stripped zero-coupon bond is created when an investment dealer separates a conventional bond into its constituent parts:

1. Zero-coupon bonds are sometimes referred to as pure discount bonds because they are always offered at a discount to their face value.

2. For zero-coupon bonds maturing within one year, the return to the investor is calculated on a price basis consistent with treasury bills. Thus, $\text{Price} = 100/(1+y(\text{days}/365))$, where y is the simple yield and days is the number of days to maturity.

Les caractéristiques et les prix des obligations

L'obligation classique est un titre de dette assorti d'un certain nombre de coupons d'intérêt payables périodiquement et d'un montant en principal remboursable à l'échéance. Comme l'indique son nom, une obligation coupon zéro ne comporte pas de coupons d'intérêt périodiques; elle est remboursable *in fine*. L'obligation coupon zéro est vendue à un prix inférieur à sa valeur nominale et remboursée à sa valeur nominale à l'échéance. Le rendement obtenu est équivalent à la différence entre la valeur nominale de l'obligation et son coût d'acquisition inférieur à la valeur nominale¹. Le coût d'acquisition d'une obligation coupon zéro dont la valeur nominale est de 100 \$ serait calculé de la façon suivante :

$$\text{Coût d'acquisition} = 100/(1+y/2)^{2n}$$

où y = le rendement semestriel de l'obligation, et
 n = le nombre d'années restant avant l'échéance.

Les obligations coupon zéro sont assimilables aux bons du Trésor du gouvernement canadien, sauf qu'elles peuvent être assorties d'échéances supérieures à un an. Elles s'apparentent aussi à d'autres produits financiers tels que les obligations d'épargne du Canada à intérêt composé et les certificats de placement garantis à intérêt composé. En effet, tous ces produits, remboursables intégralement à l'échéance, ne comportent pas de coupons ni de paiements d'intérêts périodiques.

Le rendement des obligations coupon zéro est capitalisé sur une base semestrielle aux fins d'uniformité avec les obligations classiques du gouvernement canadien, dont les coupons d'intérêt sont payables semestriellement. Ce n'est pas le cas des bons du Trésor, des obligations d'épargne du Canada ni des obligations émises dans d'autres pays, surtout en Europe, dont les intérêts ne sont versés qu'une fois l'an².

Le gouvernement canadien, pas plus d'ailleurs que la plupart des autres émetteurs au Canada, n'émet pas d'obligations coupon zéro. Toutefois, les courtiers en valeurs mobilières offrent une sorte d'obligation coupon zéro, l'obligation coupons détachés, qu'ils créent en séparant une obligation classique en composantes individuelles, à savoir :

- *les coupons*, c'est-à-dire tous les coupons d'intérêt; et
- *l'obligation résiduelle* représentant le principal³.

1. Comme elles sont toujours vendues à un prix inférieur à leur valeur nominale, les obligations coupon zéro sont parfois considérées comme des obligations à prime d'émission pures.

2. Le rendement des obligations coupon zéro de moins d'un an est calculé en fonction d'un prix conforme à celui des bons du Trésor. Ainsi, $\text{Prix} = 100/(1+y(\text{jours}/365))$, où y est le rendement simple et jours le nombre de jours restant avant l'échéance.

3. Dans le cas des obligations du secteur privé remboursables par anticipation, il s'agit de tous les coupons d'intérêt jusqu'à la date du remboursement anticipé de l'obligation, et l'obligation résiduelle consiste en un principal augmenté de tous les coupons d'intérêt à partir de la date du remboursement anticipé jusqu'à l'échéance de l'obligation.

- *coupons* consisting of all future coupon payments, and
- *bond residual* consisting of the principal.³

These are then sold separately to investors at a discount to their face values, with the bond residual component trading as a stripped zero-coupon bond and each coupon also trading as a stripped zero-coupon bond. Often, the coupons from the same conventional bond are sold together as a package of strips.

Yield curves

The semi-annual yield on a zero-coupon bond is known as a *spot-rate yield* because it is the yield associated with a specific cash flow at a specific maturity. The graphical representation of spot rates at different maturities is known as the spot-rate yield curve. In contrast, the yield on a conventional bond is normally stated as a *yield to maturity*. This is the *average* yield on all the cash flows of a bond. Thus, the spot-rate yield curve is always above an upward-sloping yield to maturity curve, as shown in Chart 1. Conversely, the spot-rate yield curve would be below the yield to maturity curve in a downward-sloping yield curve environment. Yield to maturity is therefore different from the spot-rate yield except in the unusual circumstance where the yield curve is totally flat.⁴ The mathematical background of the spot-rate yield curve is explained in the appendix.

Concept of duration

The concept of duration is central to the measurement of the price sensitivity of a bond to changes in interest rates. In general, the longer the duration of a bond, the higher the volatility or sensitivity of its price to changes in yield to maturity. The duration of a zero-coupon bond is always equal to its term to maturity. However, duration is less than maturity in the case of a conventional bond because the bond pays part of its return before maturity. This reflects the coupon payments that effectively shorten the payback period of the initial investment. For example, at the end of November 1996, the duration of the 9 per cent

Ces composantes sont ensuite vendues séparément aux investisseurs à un prix inférieur à leur valeur nominale, chacune se négociant comme une obligation coupons détachés. Souvent, les coupons détachés de la même obligation classique sont vendus en bloc.

Les courbes de rendement

Le rendement semestriel d'une obligation coupon zéro est appelé *rendement au comptant*, car il est associé à un mouvement de trésorerie donné à une échéance donnée. La représentation graphique des rendements au comptant pour diverses échéances est appelée courbe de rendement au comptant. En revanche, le rendement d'une obligation classique est habituellement appelé *rendement à l'échéance*; il s'agit du rendement *moyen* de l'ensemble des flux concernant une obligation. Ainsi, la courbe de rendement au comptant apparaît toujours au dessus de la courbe de rendement à l'échéance à pente ascendante, comme l'illustre le Graphique 1. Mais, dans une situation de baisse des taux de rendement, c'est le cas contraire qui se produirait. Le rendement à l'échéance diffère donc du rendement au comptant, sauf dans le cas rare où la courbe de rendement est entièrement plate⁴. Le calcul mathématique relatif à la courbe de rendement au comptant est expliqué en annexe.

Le concept de la duration

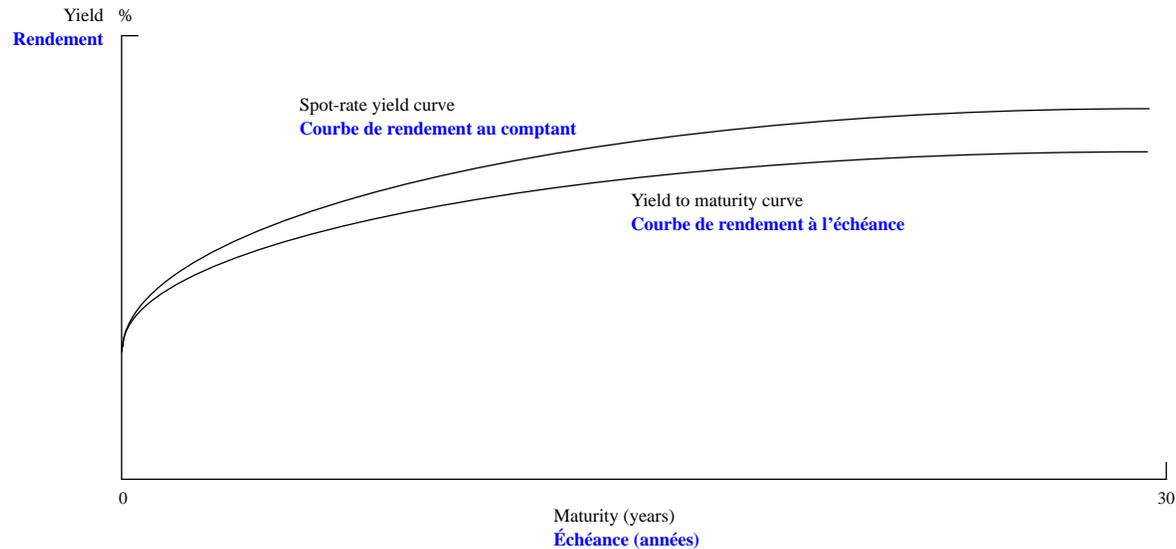
La duration est un concept déterminant de la mesure de la sensibilité d'une obligation aux variations des taux d'intérêt. En général, plus la duration d'une obligation est longue, plus le prix de celle-ci sera volatil ou sensible aux variations du rendement à l'échéance. La duration d'une obligation coupon zéro est toujours égale à son échéance. Toutefois, la duration d'une obligation classique est plus courte que son échéance, car une partie de son rendement est payée avant l'échéance. En effet, les coupons d'intérêt raccourcissent effectivement la période de récupération de l'investissement initial. Par exemple, à la fin de novembre 1996, l'obligation 9 % du gouvernement canadien échéant le 1^{er} juin 2025 avait une duration de 11,2 ans environ, pour une échéance de 29 ans et demi. Ainsi, le prix d'une obligation coupon zéro assortie d'une échéance de 11,2 ans varierait de la même façon que l'obligation échéant le 1^{er} juin 2025 si le rendement ne change pas beaucoup⁵. Plus le taux d'intérêt est élevé, plus l'écart entre la duration et l'échéance d'une obligation est grand.

3. For non-Government of Canada bonds with call options, the coupons consist of all future coupon payments up to the call date of the bond, and the bond residual consists of the principal plus any coupon payments from the call date of the bond to the bond's maturity date.

4. The discrepancy between the yield to maturity and the spot-rate yield increases non-linearly with the term to maturity and the level of interest rates.

4. L'écart entre le rendement à l'échéance et le rendement au comptant s'accroît de façon non linéaire selon l'échéance et le niveau des taux d'intérêt.

5. Voir l'Annexe pour une description plus exhaustive du concept de la duration.



Government of Canada bond due 1 June 2025 was approximately 11.2 years compared with a remaining term to maturity of 29 1/2 years. Thus, a zero-coupon bond with a maturity of 11.2 years would have a price change similar to the 1 June 2025 bonds for small changes in yield.⁵ The higher the rate of interest, the higher the discrepancy between the duration and the term to maturity of a conventional bond.

Investment properties

An investor holding a conventional bond derives income from three sources:

- periodic coupon payments
- interest income earned from the reinvestment of coupon payments
- the difference (positive or negative) between the purchase price of the bond and the par value of the bond held to maturity (or the price at which the bond is sold prior to maturity)

5. See the appendix for a more complete description, including limitations on the use of duration.

Les caractéristiques du placement

Le détenteur d'une obligation classique tire un revenu de trois sources :

- les coupons d'intérêt payables périodiquement;
- le réinvestissement du produit des coupons d'intérêt;
- la différence (positive ou négative) entre le coût d'achat de l'obligation et la valeur nominale de celle-ci à l'échéance (ou le prix auquel l'obligation est vendue avant l'échéance).

Une obligation coupon zéro n'étant pas munie de coupons d'intérêt, le seul revenu qu'en tire le détenteur est équivalent à la différence entre le prix d'acquisition et le remboursement à l'échéance ou le prix de vente avant l'échéance. Par conséquent, le risque de taux d'intérêt et de réinvestissement et le traitement fiscal différent de ceux d'une obligation classique.

Le risque de taux d'intérêt

L'investisseur qui décide de vendre une obligation classique ou une obligation coupon zéro avant l'échéance s'expose à un risque de taux d'intérêt, car la valeur de l'obligation sur le marché augmentera ou diminuera en fonction de la baisse ou de la

Since a zero-coupon bond has no coupon payments, all income is derived solely from the difference between the purchase price and the maturity or sale price of the bond. It consequently differs from a conventional bond in interest rate risk, coupon reinvestment risk, and tax considerations.

Interest rate risk

An investor who chooses to sell either a conventional bond or a zero-coupon bond before it matures is susceptible to interest rate risk because the market value of the bond will rise or fall as interest rates fall or rise. For instance, the higher the current interest rate, the more the cash flows of a bond are discounted and, hence, the lower the market value of the bond. A bond with a longer term to maturity or a lower coupon payment will have greater interest rate risk than a bond with a shorter maturity or a higher coupon payment. A longer maturity increases the discount factor on the coupons and the principal, while a low coupon rate increases the relative importance of the principal. Accordingly, for any given maturity, a zero-coupon bond has the greatest interest rate risk and thus the greatest price volatility.⁶ This can be advantageous to an investor who has strong expectations of declining interest rates since zero-coupon bonds hold the promise of large capital gains. However, investors can also face significant capital losses if interest rates rise. Thus, an investor's desire to hold zero-coupon bonds is determined in large part by the investor's appetite for interest rate risk. On the other hand, an investor who holds a zero-coupon bond to maturity incurs no nominal price risk because the value of the bond at maturity is determined by the face value of the bond and not by prevailing interest rates.

Reinvestment risk

Investors holding conventional bonds must reinvest future coupon income at unknown future interest rates.⁷ This exposes the investor to reinvestment risk. Reinvestment risk increases with the term to maturity as more of the underlying value of the bond is derived from the coupon payments. Alternatively, for two conventional bonds with similar

hausse des taux d'intérêt. Par exemple, plus le taux d'intérêt est élevé, plus les flux des coupons et des remboursements sont réduits, et donc plus la valeur de l'obligation sur le marché est faible. Par ailleurs, le risque de taux d'intérêt est plus élevé pour une obligation ayant une échéance plus longue ou munie d'un coupon plus petit que pour une obligation dont l'échéance est plus courte ou qui est munie d'un coupon plus gros. Une échéance plus longue accroît le facteur d'actualisation des coupons et du principal, alors qu'un petit coupon augmente l'importance relative du principal. Par conséquent, pour toute échéance donnée, les obligations coupon zéro affichent le risque de taux le plus élevé et, ainsi, la volatilité la plus grande⁶. Cela peut être avantageux pour un investisseur qui table fortement sur une baisse des taux d'intérêt, car une telle baisse peut donner lieu à des plus-values en capital importantes. Toutefois, des moins-values considérables peuvent également apparaître si les taux d'intérêt augmentent. Tout compte fait, l'acquisition d'obligations coupon zéro est déterminée en grande partie par le seuil de tolérance au risque de taux d'intérêt. En revanche, l'investisseur qui conserve une obligation coupon zéro jusqu'à échéance ne court pas de risque en ce qui concerne la valeur nominale de celle-ci, étant donné que la valeur de l'obligation à l'échéance est déterminée non par les taux d'intérêt en vigueur, mais par sa valeur nominale.

Le risque de réinvestissement

Les détenteurs d'obligations classiques doivent réinvestir le produit des coupons d'intérêt à des taux d'intérêt futurs inconnus⁷. Ils s'exposent ainsi au risque de réinvestissement, qui augmente en fonction de l'échéance, une plus grande part de la valeur sous-jacente de l'obligation provenant des coupons. À l'inverse, dans le cas de deux obligations classiques ayant la même échéance, le risque de réinvestissement est moindre pour celle qui est munie du plus petit coupon, étant donné qu'une plus grande part de sa valeur est liée au produit du remboursement du principal. Il n'y a pas de risque de réinvestissement pour les obligations coupon zéro conservées jusqu'à l'échéance, l'accumulation du capital n'étant pas fonction du réinvestissement du produit des coupons.

Les obligations coupon zéro ne présentant pas de risques de réinvestissement, les investisseurs peuvent appairer le revenu qu'ils en tirent et leurs engagements financiers futurs. L'encadré de la page 53 expose la méthode d'appariement des flux et montre également comment on peut créer des titres synthétiques à revenu fixe à partir des obligations coupon zéro.

6. An alternative, but equivalent, means of looking at interest rate risk is that the longer the duration of the bond, the more susceptible the bond is to interest rate risk.

7. The yield to maturity calculation for a conventional bond implicitly assumes that all coupon payments are reinvested at the yield to maturity. The actual yield an investor receives will vary depending on the prevailing interest rates at the time the coupon payments are reinvested.

6. On peut également considérer le risque de taux d'intérêt sous un autre angle équivalent au premier : plus la durée de l'obligation est longue, plus celle-ci est exposée au risque de taux.

7. Le calcul du rendement à l'échéance d'une obligation classique suppose implicitement que tous les coupons d'intérêt sont réinvestis au taux en vigueur à l'échéance. Le rendement effectif variera en fonction des taux d'intérêt pratiqués au moment du réinvestissement.

maturities, the bond with the lower coupon payment will have lower reinvestment risk because more of the value of the bond is derived from the repayment of the principal. A zero-coupon bond held to maturity has no reinvestment risk since the accumulation of capital does not depend on the reinvestment of coupon payments.

The absence of reinvestment risk with zero-coupon bonds enables investors to match future cash flow obligations in dollar terms. This is demonstrated in the box on page 53, which also shows how synthetic fixed-income securities can be created with zero-coupon bonds.

Tax considerations

Revenue Canada designates the difference between the purchase price of a zero-coupon bond and the amount paid at maturity as *deemed interest*. For an investor who holds a zero-coupon bond to maturity, part of this deemed interest must be reported as interest income on an annual basis even though the investor does not receive the money until the bond matures. If a zero-coupon bond is sold prior to maturity, part of the difference between the purchase price and the sale price of the zero-coupon bond is considered deemed interest, and part is considered either a capital gain or loss depending on the difference between interest rates when the bond was purchased and the prevailing interest rates at the time the bond is sold.⁸ As a consequence of the timing and complexity of tax payments, zero-coupon bonds are often better suited for pension funds, Registered Retirement Savings Plans (RRSPs), and other tax-deferred investment plans (where income is not taxed until funds are withdrawn from the plans) than for conventional taxable investments.

Strip bonds

Who uses stripped zero-coupon bonds?

The strip bond market is used extensively by investors as an alternative to treasury bills and for defeasance purposes. Stripped zero-coupon bonds are also often used by fixed-income portfolio managers as a means of adjusting the duration of their portfolios. The duration of a portfolio is defined in the same manner as the duration of a single instrument. It reflects the effect on a portfolio of small changes in interest rates. There are two possible reasons for adjusting the duration of a portfolio. First, the portfolio manager could be taking a view on

8. For example, if interest rates had not changed between the time when the zero-coupon bond was purchased and the time when the bond is sold, then an investor would have the accrued interest. However, if interest rates had fallen, then an investor who sold the bond would also receive capital gains.

Le traitement fiscal des obligations coupon zéro

Pour Revenu Canada, la différence entre le prix d'acquisition d'une obligation coupon zéro et le montant reçu à l'échéance est l'*intérêt réputé*. Un investisseur qui conserve jusqu'à l'échéance une obligation coupon zéro doit déclarer une partie de l'intérêt réputé au titre de revenu d'intérêt annuel gagné même si ces fonds ne lui sont pas versés avant l'échéance de l'obligation. Lorsqu'une obligation coupon zéro est vendue avant l'échéance, une partie de la différence entre son prix d'acquisition et son prix de vente est considérée comme l'intérêt réputé, et le reste comme gain ou perte en capital selon le niveau des taux d'intérêt en vigueur au moment de la vente⁸. Compte tenu du moment où s'effectuent les paiements au titre de l'impôt et de leur complexité, les obligations coupon zéro conviennent souvent mieux aux caisses de retraite, aux régimes enregistrés d'épargne-retraite et aux plans d'investissement à impôt différé (dont les revenus ne sont pas imposables tant que les fonds ne sont pas retirés) qu'à des portefeuilles de placements constitués d'instruments classiques imposables.

Les obligations coupons détachés

Les utilisateurs

Les obligations coupons détachés sont souvent utilisées par les investisseurs à la place des bons du Trésor et aux fins de désendettement, ainsi que par les gestionnaires de portefeuilles de titres à revenu fixe pour ajuster la durée de leurs portefeuilles. La durée d'un portefeuille est définie de la même façon que celle d'un titre en particulier; elle reflète l'incidence que de légères variations de taux d'intérêt ont sur le portefeuille. Deux raisons peuvent motiver les gestionnaires à ajuster la durée d'un portefeuille. Premièrement, le gestionnaire pourrait anticiper l'orientation des taux d'intérêt futurs. En augmentant la durée de son portefeuille, il accroît sa sensibilité aux variations de taux. Par conséquent, s'il pense que les taux d'intérêt vont baisser, il accroîtra la durée du portefeuille pour essayer de réaliser des plus-values additionnelles découlant de la hausse attendue de la valeur des obligations. Inversement, le gestionnaire réduira la durée d'un portefeuille s'il prévoit une hausse des taux d'intérêt. La durée d'un portefeuille peut également être ajustée aux fins d'*immunisation*. L'immunisation consiste dans l'appariement de la durée moyenne des actifs et de celle des engagements. Toute fluctuation de la valeur des engagements attribuable à des variations de taux serait à peu près compensée par une fluctuation similaire de la valeur des avoirs. La gestion de la durée est donc un outil important de gestion du risque de taux d'intérêt inhérent à un portefeuille de titres à revenu fixe.

8. Par exemple, si les taux n'ont pas changé entre le moment où l'obligation coupon zéro a été achetée et le moment où elle a été vendue, l'investisseur reçoit des intérêts accumulés. Toutefois, si les taux ont baissé, le vendeur de l'obligation enregistre en plus des gains en capital.

Matching future cash flow obligations with zero-coupon bonds

Some investors try to match the cash flow from their fixed-income investments against future cash flow obligations. Corporations, in particular, often know their future cash outflows long in advance. However, matching future liabilities with conventional bonds can be difficult. For example, a corporation may know today that it has to make a \$10 million payment on a specific date five years hence to cover the cost of redeeming an outstanding series of corporate bonds. It could buy conventional five-year Government of Canada bonds trading near par. However, the disadvantage of this approach is that the corporation would have to pay close to the full \$10 million today to buy the bonds. As well, it would receive semi-annual coupon payments that it would have to reinvest at unknown future interest rates. To avoid these problems, the corporation could buy a five-year zero-coupon bond with a maturity close to the known cash outflow date. The advantages of this approach are that the zero-coupon bond would be purchased at a discount to its face value (resulting in a smaller up-front cost to the company today) and the corporation could avoid the reinvestment risk associated with the coupon payments. If the corporation is successful in exactly matching its future debt liabilities with zero-coupon bonds, then the process is known as *defeasance*.

An advantage for corporations using zero-coupon bonds, and for individuals using compound interest CSBs or GICs, to match future nominal cash flow obligations (for example, the repayment of a bond for a corporation or the down payment on a house for an individual) is that the investment process requires little active management. Once the purchase is made, the corporation or the individual does not have to manage the investment continuously as prevailing interest rates change, as long as the products are held to maturity.

Zero-coupon bonds can also be used to create more complex synthetic instruments that match the specific investment needs of the investor. For example, suppose an insurance company wants to set up an annuity to provide quarterly payments of \$5 million over the next three years to meet its future insurance obligations. Such an annuity could be created by purchasing zero-coupon bonds maturing at the end of every quarter for the next three years.

L'appariement des besoins de trésorerie futurs et des revenus provenant d'obligations coupon zéro

Certains investisseurs essaient d'apparier les flux de liquidités provenant des placements à revenu fixe et leurs besoins de trésorerie futurs. Les entreprises, particulièrement, connaissent souvent longtemps à l'avance leurs engagements financiers futurs. Toutefois, il peut être difficile d'apparier ces engagements et les revenus provenant d'obligations classiques. Par exemple, une entreprise qui sait aujourd'hui qu'elle devra déboursier 10 millions de dollars à une date donnée dans cinq ans pour le remboursement des obligations d'une de ses émissions pourrait acheter des obligations du gouvernement canadien à cinq ans dont le prix avoisine la valeur nominale. Toutefois, cette approche présente un désavantage en ce sens que l'entreprise devrait déboursier aujourd'hui la presque totalité des 10 millions de dollars que coûtent ces obligations. En outre, elle aurait à réinvestir à des taux d'intérêt futurs inconnus les paiements semestriels d'intérêts qu'elle recevrait. Ainsi, pour éviter ce genre de problème, l'entreprise pourrait acheter une obligation coupon zéro à cinq ans dont la date d'échéance serait proche de la date future connue à laquelle auraient lieu les sorties de fonds. Cette approche est avantageuse en ce sens que l'entreprise achèterait l'obligation coupon zéro à un prix inférieur à sa valeur nominale (ce qui se solderait par un coût initial plus bas pour l'entreprise aujourd'hui) et éviterait le risque de réinvestissement du produit des coupons d'intérêt. Lorsqu'une société réussit à apparier exactement ses engagements financiers futurs et ses obligations coupon zéro, on parle de *désendettement de fait*.

Un autre avantage qu'il y a pour les entreprises d'utiliser les obligations coupon zéro et pour les particuliers les obligations d'épargne du Canada ou les certificats de placement garantis à intérêt composé afin de faire face à leurs engagements financiers futurs (par exemple, le remboursement d'une émission obligataire dans le cas d'une entreprise, et le versement initial à l'achat d'une maison pour un particulier) est que le processus d'appariement des flux exige peu de gestion active. Une fois l'achat des titres fait, l'entreprise ou le particulier n'a pas, tant que les titres sont conservés jusqu'à l'échéance, à surveiller constamment ses placements lorsque varient les taux d'intérêt du marché.

Les obligations coupon zéro peuvent aussi servir à créer des titres synthétiques plus complexes correspondant aux besoins particuliers d'un investisseur. Par exemple, une compagnie d'assurance désire constituer un régime de rentes prévoyant le versement trimestriel de 5 millions de dollars au cours des trois prochaines années. Pour ce faire, elle pourrait acquérir des obligations coupon zéro échéant à la fin de chaque trimestre des trois prochaines années.

future interest rates. Increasing the duration of a portfolio increases its sensitivity to changes in interest rates. Therefore, a portfolio manager who believes interest rates are going to fall will increase the duration of the portfolio in an attempt to capture additional capital gains from the expected increase in the value of the bonds. Conversely, the manager would shorten the duration of a portfolio if an increase in interest rates was expected. As well, duration adjustments to a portfolio can be made for *immunization* purposes. Immunization is a process whereby an asset-liability manager matches the average duration of the assets to the average duration of the liabilities. Any changes in the value of the liabilities due to changes in interest rates would be approximately offset by a similar change in the value of the assets. Duration management is thus an important tool for handling the interest rate risk of a fixed-income portfolio.

At current long-term bond yields, the duration of a 30-year conventional bond is between 11 and 12 years. However, many asset-liability managers, notably pension funds and insurance companies, have liabilities that extend well beyond 12 years. These types of investors have a strong demand for longer-dated stripped zero-coupon bonds.

History of the strip bond market

Stripped zero-coupon bonds created from conventional Government of Canada bonds have been available in Canada since about 1982.⁹ Initially, the most popular bonds to strip were high-coupon bonds, i.e., bonds originally issued in a higher interest rate environment and thus trading at a premium over their face value. This reflected the fact that rough rules of thumb were often used by many investors to adjust for a bond with a high coupon rate. These rules of thumb often underestimated the present value of the nearest coupon payments, especially in an upward-sloping yield curve environment: the greater the value of the coupon on the bond, the greater the possible underpricing.

High-coupon bonds could also be underpriced because of the tax implications for domestic investors. Differential taxation rates between coupon income and capital gains favour low-coupon bonds. This factor is less important now than it once was because the tax treatment of capital gains is now closer to that of other income. Because low-coupon bonds trade at a discount to their face value, they are preferred by

Étant donné les rendements actuels des obligations à long terme, la durée d'une obligation classique à 30 ans se situe entre 11 et 12 ans. Toutefois, un grand nombre d'établissements engagés dans la gestion actif-passif, les régimes de pension et les compagnies d'assurance surtout, ont des engagements dont les échéances dépassent nettement 12 ans. Les investisseurs de cette catégorie recherchent activement des obligations coupons détachés à long terme.

Historique du marché des obligations coupons détachés

Les obligations coupons détachés dérivées des obligations classiques du gouvernement canadien sont offertes au Canada depuis 1982 environ⁹. Au départ, les obligations les plus susceptibles d'être démembrées étaient celles qui étaient munies de gros coupons. Il s'agissait d'obligations émises à un moment où les taux d'intérêt étaient élevés et qui se négociaient par conséquent au-dessus de leur valeur nominale. Cela reflétait le fait que la détermination du prix d'une obligation avec un gros coupon se faisait souvent à l'aide de méthodes approximatives, et celles-ci sous-estimaient la valeur actualisée du premier coupon d'intérêt, surtout en situation de hausse des taux de rendement. Plus la valeur du coupon était élevée, plus le risque de sous-évaluation était grand.

La sous-évaluation des obligations munies de gros coupons pouvait aussi tenir au traitement fiscal de ces instruments au Canada. L'écart entre le taux d'imposition des revenus d'intérêt provenant des coupons et celui des gains en capital favorise les obligations munies de petits coupons. Ce facteur revêt moins d'importance maintenant, car le traitement fiscal des gains en capital est plus comparable à celui d'autres formes de revenus. Étant donné que les obligations munies de petits coupons se négocient en deçà de leur valeur nominale, elles attirent davantage les investisseurs car elles leur permettent de reporter à l'échéance de l'obligation le paiement de l'impôt sur les plus-values en capital réalisées. Parallèlement, les investisseurs qui veulent éviter des pertes comptables n'achèteront pas d'obligations avec de gros coupons qui se négocient au-dessus de leur valeur nominale. Les investisseurs étrangers ne sont pas touchés par les effets de ce traitement fiscal. En fait, certains d'entre eux préfèrent acheter des obligations munies de gros coupons en raison du revenu élevé qu'ils en tirent.

Un autre facteur qui a contribué à la sous-évaluation des obligations munies de gros coupons dans les années 80 est le manque de liquidité de certaines émissions attribuable soit à leur petite taille soit au fait que certains investisseurs (surtout des investisseurs étrangers) avaient tendance à les conserver jusqu'à échéance. Par conséquent, les opérations sur ces obligations étaient souvent peu fréquentes, et ceux qui en avaient devaient parfois accepter de les vendre avec une décote en raison de leur illiquidité.

9. For a discussion on changes to the Government of Canada bond market since 1980, see Branion (1995). Physically stripped U.S. Treasuries were available prior to 1982, but became popular only after 1982. Most European countries are still in the process of developing strip bond markets.

9. Pour un aperçu de l'évolution du marché obligataire du gouvernement canadien depuis 1980, consulter Branion (1995). Les obligations coupons détachés du Trésor américain étaient sur le marché avant 1982 mais ne sont devenues populaires que par la suite. La plupart des pays européens travaillent encore à la mise sur pied de marchés d'obligations coupons détachés.

investors who can defer paying capital gains tax on the bond until it matures. Similarly, investors who are averse to book losses will avoid purchasing high-coupon bonds trading at a premium to their face value. Foreign investors are not influenced by such tax effects. In fact, some foreign investors prefer buying high-coupon bonds because of the income from high-coupon payments.

Another factor contributing to the underpricing of high-coupon bonds in the 1980s was the lack of liquidity of some issues, either because of their small size or because some investors (notably some foreign investors) tended to hold the bonds to maturity. Thus, these bonds often traded infrequently, and those selling high-coupon bonds occasionally had to accept an illiquidity discount in the form of a lower price for the bond.

Investment dealers could take advantage of underpriced high-coupon bonds by buying them and stripping them into their constituent parts if the sum of those parts was worth more than the bond as a whole. However, in the 1980s, investment dealers had to physically separate, or strip, the *bearer* coupons from the bond certificate and then physically transfer the bearer coupons and the bond residual to the appropriate counterparties. This cumbersome and expensive process meant that investment dealers could not fully extract the liquidity premium of the high-coupon bonds because the strip bonds were themselves illiquid. Hence, these factors limited the size of the strip bond market in Canada throughout most of the 1980s.

The physical logistics of transferring strip bonds were improved in 1987 when The Canadian Depository for Securities Limited (CDS) began to offer a service allowing fully registered “book-based” bonds to be stripped electronically. This service was further enhanced in 1992 when most of the physically stripped bonds held in custody were incorporated into the system. This alleviated concerns about the physical transfer and safekeeping of bearer coupons and bond residuals and helped contribute to the growth of the strip bond market, as shown in Chart 2 and Table 1.¹⁰ However, the strip bond market was still hindered by the fact that each coupon strip carried a separate security identification number (CUSIP) that was unique to each bond maturity.¹¹ Although it was relatively easy to strip a conventional bond, it was difficult to reconstitute or reassemble the bearer coupons with the bond residual since different coupons were not interchangeable, or *fungible*,

10. Accurate data on the volume of strip activity in Canada before 1990 are not available.

11. Each fixed-income product is identified by a unique CUSIP (Committee on Uniform Securities Identification Procedures) security identification number.

Les courtiers en valeurs mobilières pouvaient tirer profit de la sous-évaluation des obligations munies de gros coupons en les séparant en composantes individuelles dans la mesure où la somme de ces composantes avait une valeur supérieure à celle de l’obligation entière. Dans les années 80 cependant, les courtiers devaient détacher physiquement les coupons *au porteur* du certificat d’obligation et les transférer physiquement, ainsi que l’obligation résiduelle, aux contreparties concernées. La lourdeur et le coût élevé de ce processus faisait en sorte qu’ils ne pouvaient pas éliminer totalement la prime de liquidité des obligations à gros coupons car les obligations coupons détachés étaient elles-mêmes illiquides. Ces facteurs expliquent donc l’étroitesse du marché des obligations coupons détachés au Canada pendant presque toute la décennie 80.

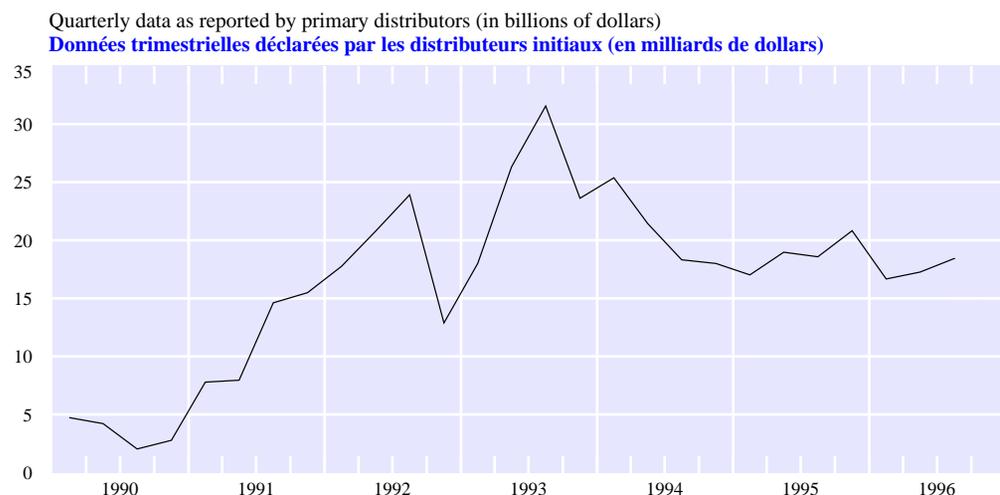
Le mode de transfert des obligations coupons détachés a été amélioré en 1987, au moment où La Caisse canadienne de dépôt de valeurs limitée (CDS) a commencé à offrir un service permettant le démembrement électronique des obligations entièrement nominatives inscrites en compte. Ce service a été perfectionné en 1992 avec l’inscription en compte de la plupart des obligations démembrées placées sous la garde de la CDS. Cela a calmé les craintes entourant le transfert physique et la garde des coupons au porteur et des obligations résiduelles et contribué à la croissance du marché des obligations coupons détachés, comme en font état le Graphique 2 et le Tableau 1¹⁰. Toutefois, ce marché était encore entravé par le fait que chaque coupon détaché portait un numéro CUSIP distinct propre à chaque échéance¹¹. Même s’il était relativement facile de démembrer une obligation classique, il était difficile de reconstituer ou de réunir les coupons au porteur à l’obligation résiduelle étant donné que les coupons n’étaient pas interchangeables ou *fungibles*. Cela a nui à la liquidité des obligations coupons détachés et, partant, à leur prix. Cela a aussi fait que les courtiers en valeurs mobilières ne pouvaient tirer profit des obligations sous-évaluées du gouvernement canadien qu’en les démembrant. Ainsi, la plupart des obligations munies de gros coupons avaient déjà été démembrées en 1992.

En juin 1993, la CDS a commencé à émettre un seul numéro CUSIP pour tous les coupons ayant une date de paiement commune¹². Ainsi, par exemple, les coupons démembrés de l’obligation 7,5 % du gouvernement canadien échéant le 1^{er} décembre 2003 et ceux de l’obligation 9,75 % échéant le 1^{er} juin 2021 avaient le même numéro CUSIP car, dans les deux cas, ils étaient payables le 1^{er} juin et le 1^{er} décembre. L’utilisation de numéros CUSIP génériques conjuguée à la mise en place d’un service de reconstitution des obligations a fortement contribué à améliorer le marché des

10. On ne dispose pas de données précises sur le volume de l’activité sur le marché des obligations coupons détachés au Canada avant 1990.

11. Chaque produit à revenu fixe est identifié par un numéro CUSIP (Committee on Uniform Securities Identification Procedures) unique.

12. Plus précisément, les paiements qui ont un numéro CUSIP commun doivent avoir le même émetteur et la même date, être du même type (coupon ou principal) et être libellés dans la même monnaie.



with each other. This affected the liquidity of the strip bonds and thus their price. It also meant that investment dealers could take advantage of mispriced Government of Canada bonds only by stripping them. By 1992, most of the obvious high-coupon bonds had already been stripped.

In June 1993, the CDS began to issue one CUSIP number for all coupons sharing a common payment date.¹² This meant, for example, that coupons stripped from the Government of Canada 7.5 per cent bonds due 1 December 2003 and the 9.75 per cent bonds due 1 June 2021 had the same CUSIP number because both bonds made coupon payments on 1 June and 1 December. The use of generic CUSIPs together with the introduction of a reconstitution service greatly helped to improve the strip bond market in Canada, as demonstrated by the large volume of trading in strip bonds during 1993. For the first time, investment dealers could take advantage of mispricings in both directions by stripping underpriced conventional bonds and reconstituting underpriced strip bonds.

Table 1 shows that the size of the strip bond market in Canada (as measured by the par value of the underlying conventional bond stripped

obligations coupons détachés au Canada, comme en fait foi l'important volume de l'activité sur ce marché en 1993. Pour la première fois, les courtiers en valeurs mobilières pouvaient tirer profit des sous-évaluations dans les deux sens, en démembrant les obligations classiques et en reconstituant les obligations coupons détachés sous-évaluées.

Le Tableau 1 montre que la taille du marché canadien des obligations coupons détachés (mesurée par la valeur nominale de l'obligation classique démembrée par inscription en compte à la CDS) se chiffrait à quelque 55,6 milliards de dollars en novembre 1996, dont environ 19,1 milliards, soit 34 % du marché, représentaient des obligations du gouvernement canadien, et que le reste était composé d'obligations des sociétés, des provinces, des sociétés d'État provinciales et des municipalités¹³. Les 19,1 milliards de dollars représentent environ 7 % de l'encours des obligations du gouvernement canadien évalué à 272 milliards de dollars en novembre 1996.

Les obligations coupons détachés des provinces ont joué un rôle important sur le marché des coupons détachés au Canada durant les années 90, car celles-ci ont émis de gros montants de titres d'emprunt à long terme. Ces titres offrent un rendement plus élevé que les obligations coupon zéro du gouvernement canadien équivalentes, ce qui incite les investisseurs (surtout sur le marché des titres destinés aux particuliers) à accepter ces titres en dépit de la plus faible cote de crédit des provinces.

12. More specifically, for payments to share a common CUSIP number, they must have the same issuer, payment date, currency, and payment type (either coupon or principal).

13. À peu près 12,5 milliards de dollars d'obligations physiquement démembrées et de reçus de valeur sont également en circulation en sus des 55,6 milliards d'obligations démembrées par jeu d'écritures à la CDS.

	Billions of dollars	En milliards de dollars			
	Total size of market ¹ Taille globale du marché ¹	Stripped Government of Canada bonds Obligations coupons détachés du gouvernement canadien	Stripped corporate bonds Obligations coupons détachés des sociétés	Stripped provincial and other bonds Obligations coupons détachés des provinces et autres obligations	
December 1991	15.57	6.73	0.98	7.87	Décembre 1991
December 1992	25.73	11.26	0.98	13.49	Décembre 1992
December 1993	36.79	17.47	1.14	18.18	Décembre 1993
December 1994	46.66	19.99	1.28	25.39	Décembre 1994
December 1995	55.29	20.47	1.29	33.52	Décembre 1995
November 1996	55.56	19.11	1.37	35.08	Novembre 1996

1. As measured by the par value of the underlying conventional bond stripped by book entry only
Source: The Canadian Depository for Securities Limited

1. Mesurée selon la valeur nominale de l'obligation classique sous-jacente démembrée par inscription en compte seulement

Source : La Caisse canadienne de dépôt de valeurs limitée

by book entry through the CDS) was approximately \$55.6 billion at November 1996, with about \$19.1 billion, or 34 per cent of the market, consisting of Government of Canada bonds and the balance consisting of corporate bonds, provincial bonds, and other bonds such as provincial Crown corporations and municipal bonds.¹³ The \$19.1 billion represents about 7 per cent of the \$272 billion of Government of Canada bonds outstanding at November 1996.

Provincial stripped zero-coupon bonds have played a large role in the strip bond market in Canada during the 1990s as the provinces have issued a large amount of long-term debt. These bonds offer a higher yield than equivalent Government of Canada stripped zero-coupon bonds as an inducement to investors (particularly at the retail level) to accept the lower credit ratings of the provinces.

One recent innovation to the strip bond market has been the addition of stripped Real Return Bonds (RRBs). Real Return Bonds are the only fixed-income asset that provides a hedge against inflation (see Côté et al. 1996). At the moment, there are two Real Return Bonds outstanding: the

13. Approximately \$12.5 billion of physically stripped bonds and receipt securities are also outstanding in addition to the \$55.6 billion of bonds stripped by book entry through CDS.

Les obligations à rendement réel coupons détachés ont récemment fait leur apparition sur le marché des obligations coupons détachés. Les obligations à rendement réel sont les seuls titres à revenu fixe qui fournissent à l'investisseur une protection contre l'inflation (voir Côté et coll., 1996). À l'heure actuelle, deux émissions d'obligations à rendement réel sont en circulation, soit l'émission 4,25 % échéant le 1^{er} décembre 2021 et l'émission 4,25 % échéant le 1^{er} décembre 2026¹⁴. Dans les deux cas, les paiements de coupons corrigés de l'incidence de l'inflation sont versés chaque année le 1^{er} juin et le 1^{er} décembre, et le remboursement du principal, également corrigé de l'inflation, se fait à l'échéance. Les obligations à rendement réel coupons détachés peuvent donc être utilisées par les particuliers et les gestionnaires de caisses de retraite pour appairer leurs obligations financières futures et leurs engagements corrigés de l'inflation.

Le volume de l'activité sur le marché des obligations coupons détachés peut varier selon la phase du cycle des taux d'intérêt. Par exemple, l'activité baisse lorsqu'on s'attend à ce que les taux d'intérêt restent bas, étant donné que le risque de

14. Actuellement, environ 140 millions de dollars de l'obligation à rendement réel 4,25 % arrivant à échéance le 1^{er} décembre 2021 ont été démembrés. La Commission des valeurs mobilières de l'Ontario a rendu une décision spéciale permettant que le bulletin d'information sur les obligations à rendement réel coupons détachés (disponible auprès des courtiers en valeurs mobilières) serve de document d'information pour toutes les transactions sur le marché secondaire liées aux coupons au porteur et aux obligations résiduelles à rendement réel 4,25 % échéant le 1^{er} décembre 2021.

4.25 per cent bonds due 1 December 2021 and the 4.25 per cent bonds due 1 December 2026.¹⁴ Both bonds make inflation-adjusted coupon payments on 1 June and 1 December of each year and pay an inflation-adjusted principal at maturity. Stripped Real Return Bonds can thus be used by retail investors and pension fund managers to match future cash flow obligations against inflation-indexed liabilities.

Trading volume in the strip bond market can vary depending on the phase of the interest rate cycle. For instance, trading declines when interest rates are expected to stay low, since reinvestment risk, which is nil with stripped zero-coupon bonds, is then low with conventional bonds. As well, there is the risk of significant capital losses if an investor sells as interest rates rise. Nevertheless, in all interest rate environments, the opportunity to trade in the strip bond market improves the liquidity and efficiency of Canadian fixed-income markets, thus helping to reduce the overall cost of borrowing to the government.

réinvestissement dans les obligations classiques, qui est nul dans le cas des obligations coupon zéro démembrées, est faible dans ce cas. En outre, un investisseur qui vend quand les taux d'intérêt augmentent fait face à un risque de perte en capital très important. Néanmoins, quel que soit le niveau des taux d'intérêt, le marché des obligations coupons détachés accroît la liquidité et l'efficacité des marchés canadiens de titres à revenu fixe et contribue à réduire le coût d'emprunt global pour le gouvernement.

14. Currently, about \$140 million of the 4.25 per cent 1 December 2021 RRB has been stripped. The Ontario Securities Commission has issued a special ruling that permits the "RRB Strip Bond Information Statement" (available from investment dealers) to function as a disclosure statement for all secondary market transactions in the 4.25 per cent 1 December 2021 RRB coupons and residuals.

Appendix: Spot rates and the concept of duration

The graphical representation of spot rates of zero-coupon bonds at different maturities is known as the spot-rate yield curve. A spot-rate yield curve can be constructed from a series of stripped Government of Canada bonds with different maturities. Alternatively, a theoretical spot-rate yield curve can be constructed by disaggregating the cash flows from a group of conventional Government of Canada bonds.¹ This is done by viewing a conventional bond as a package of cash flows consisting of periodic coupon payments plus the repayment of the principal at maturity. Each cash flow is treated as a zero-coupon instrument, allowing a conventional bond to be priced as a package of zero-coupon instruments maturing at six-month intervals.² The semi-annual compounding of a conventional bond would thus give:

$$Price = \frac{C}{\left(1 + \frac{y_1}{2}\right)^1} + \frac{C}{\left(1 + \frac{y_2}{2}\right)^2} + \dots + \frac{C}{\left(1 + \frac{y_{2n}}{2}\right)^{2n}} + \frac{100}{\left(1 + \frac{y_{2n}}{2}\right)^{2n}} \quad (A1)$$

where C = the semi-annual coupon payment
 100 = the face value of the bond at maturity
 n = the number of years to maturity
 y_i = the spot rate at time i (in six-month intervals).

In contrast to the spot rate, the yield to maturity on a conventional bond has a different interpretation. It is the implied internal rate of return that an investor would achieve by holding a conventional bond to maturity. The price of a conventional bond in terms of yield to maturity would be:

1. The most common technique for creating a complete theoretical spot-rate yield curve from a group of conventional bonds is known as bootstrapping a yield curve. See Fabozzi and Fabozzi (1995).

2. Conventional bonds are always compounded on a semi-annual basis to match the semi-annual coupon payment.

Annexe : Les taux au comptant et le concept de duration

La courbe de rendement des taux au comptant est la représentation graphique des taux au comptant des obligations coupon zéro à diverses échéances. Elle peut être élaborée à partir d'une émission d'obligations du gouvernement canadien coupons détachés ayant diverses échéances. On peut aussi créer une courbe de rendement théorique des taux au comptant en décomposant les flux des coupons et des remboursements associés à un groupe d'obligations classiques du gouvernement canadien¹. Pour ce faire, on considère l'obligation classique comme un ensemble de flux consistant en paiements périodiques de coupons et en remboursements du principal à l'échéance. Chaque flux de liquidités est traité comme un instrument coupon zéro, de sorte que le prix de l'obligation classique est déterminé en fonction d'un ensemble d'instruments coupon zéro arrivant à échéance tous les six mois². Le prix d'une obligation classique capitalisée sur base semestrielle serait ainsi donné par l'équation suivante :

$$Prix = \frac{C}{\left(1 + \frac{y_1}{2}\right)^1} + \frac{C}{\left(1 + \frac{y_2}{2}\right)^2} + \dots + \frac{C}{\left(1 + \frac{y_{2n}}{2}\right)^{2n}} + \frac{100}{\left(1 + \frac{y_{2n}}{2}\right)^{2n}} \quad (A1)$$

où C = le paiement semestriel des coupons
 100 = la valeur nominale de l'obligation à l'échéance
 n = le nombre d'années jusqu'à l'échéance
 y_i = le taux au comptant au temps i (intervalles de six mois).

Contrairement au taux au comptant, le rendement à l'échéance d'une obligation classique s'interprète différemment. Il s'agit du taux de rendement interne implicite qu'un investisseur obtiendrait en conservant l'obligation jusqu'à l'échéance. Le prix d'une obligation classique en fonction du rendement à l'échéance serait ainsi donné par l'équation suivante :

1. L'«initialisation» d'une courbe de rendement est la technique la plus utilisée pour la création d'une courbe de rendement théorique complète de taux au comptant à partir d'un groupe d'obligations classiques. Voir Fabozzi & Fabozzi (1995).

2. Les obligations classiques sont toujours capitalisées sur une base semestrielle correspondant au paiement semestriel des coupons.

$$Price = \frac{C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^1} + \frac{C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^2} + \dots + \frac{C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{2n}} + \frac{100}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{2n}} \quad (A2)$$

where y = the yield to maturity.

The yield to maturity of a bond is the number quoted most frequently in the financial press.

Duration

There are two common types of duration, each serving a different purpose. The first common form of duration, known as *modified duration*, measures the sensitivity of a bond's percentage price change to changes in the bond's yield. That is, if the yield to maturity of a bond is plotted on the x axis and the price of the bond is plotted on the y axis, then modified duration is a measure of the slope of the curve at a given price, as shown in Chart A1. This can be stated more formally as

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dy} = - \text{modified duration.} \quad (A3)$$

Thus, taking the first-order derivative of formula (A2) and dividing by the price gives modified duration:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dy} = \frac{-1}{P} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)} \left[\frac{1C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)} + \frac{2C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^2} + \dots + \frac{2nC}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{2n}} + \frac{2n100}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{2n}} \right]. \quad (A4)$$

$$Prix = \frac{C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^1} + \frac{C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^2} + \dots + \frac{C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{2n}} + \frac{100}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{2n}} \quad (A2)$$

où y = le rendement à l'échéance.

Le rendement à l'échéance d'une obligation est le chiffre le plus souvent cité dans la presse financière.

La duration

Il existe deux types de duration, chacun étant utilisé à des fins précises. Le premier, appelé *duration approchée*, mesure la sensibilité du prix d'une obligation aux variations du rendement de celle-ci. Autrement dit, si le rendement d'une obligation à l'échéance est reproduit sur l'axe des abscisses et le prix de l'obligation sur l'axe des ordonnées, la duration approchée est donnée par la pente de la courbe à un prix donné, comme le montre le Graphique A1. Sous sa forme abrégée, l'équation s'écrit comme suit :

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dy} = - \text{duration approchée.} \quad (A3)$$

Si l'on prend la dérivée de premier ordre de la formule (A2) et qu'on la divise par le prix, l'équation détaillée de la duration approchée s'écrit :

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dy} = \frac{-1}{P} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)} \left[\frac{1C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)} + \frac{2C}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^2} + \dots + \frac{2nC}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{2n}} + \frac{2n100}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{2n}} \right]. \quad (A4)$$

It can be seen that the greater the modified duration of a bond, the greater the slope, and therefore the greater its price volatility.³ As well, for any given maturity, the lower the coupon on the bond, the lower the price of the bond, the greater its modified duration and, thus, the greater its price volatility. In the limit, the zero-coupon bond at any given maturity will have the greatest modified duration, $n/(1+y/2)$, and the greatest price volatility. At the other extreme, in the case of a perpetual bond (or console) with $n = \infty$ and no prepayment of principal, duration would be $1/y$.

The second form of duration is known as *Macaulay duration*. It is achieved by multiplying equation (A3) by $(1+y/2)$ to give

$$\left(1 + \frac{y}{2}\right) \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dy} = \text{Macaulay duration.} \quad (\text{A5})$$

3. The duration calculation is stated in semi-annual terms. To convert the duration calculation to years, the result should be divided by 2.

On constate que plus la durée approchée d'une obligation est élevée, plus la pente est prononcée et plus le prix de l'obligation est volatil.³ Parallèlement, pour toutes les échéances, plus le coupon de l'obligation est petit, plus le prix de celle-ci est bas, plus sa durée approchée est élevée et, partant, plus son prix est volatil. À la limite, l'obligation coupon zéro à n'importe quelle échéance aura la durée approchée la plus élevée, $n/(1+y/2)$, et le prix le plus volatil. Dans le cas d'une obligation perpétuelle, si n tend vers l'infini et qu'il n'y a pas de remboursement anticipé du principal, la durée serait égale à $1/y$.

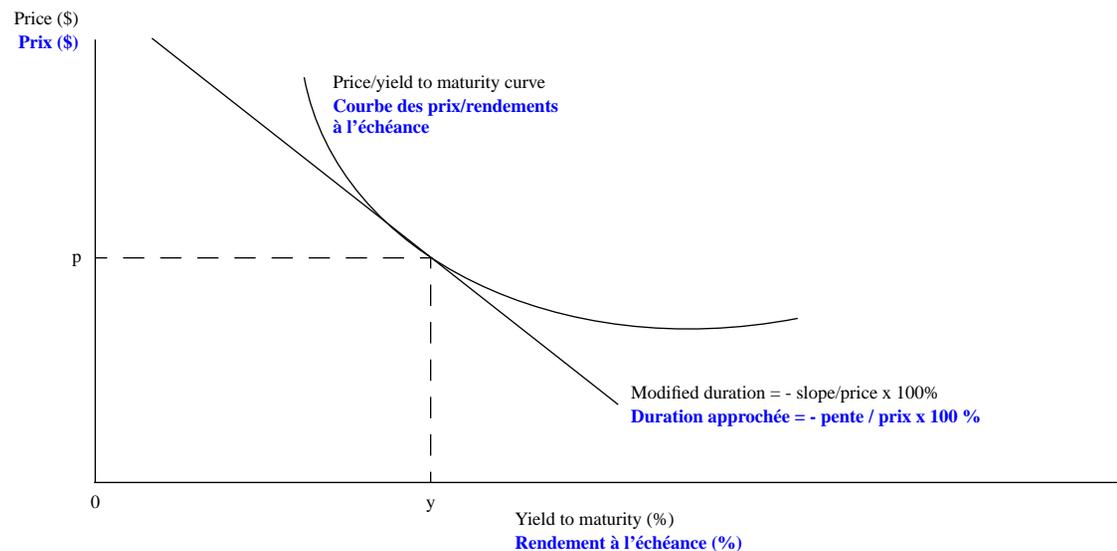
La deuxième forme de durée est appelée *duration Macaulay*. On l'obtient en multipliant l'équation (A3) par $(1+y/2)$, soit :

$$\left(1 + \frac{y}{2}\right) \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dy} = \text{duration Macaulay.} \quad (\text{A5})$$

3. La durée est exprimée en chiffres semestriels. Pour la convertir en chiffres annuels, on divise le résultat par 2.

Chart A1
Graphique A1

Modified duration
Durée approchée



The Macaulay duration of a zero-coupon bond is always equal to its maturity. Therefore, for small changes in interest rates, a conventional bond and a zero-coupon bond with the same Macaulay duration will behave in a similar manner.

Unfortunately, duration has two shortcomings: it does not work for bonds with embedded options, and it assumes a flat yield curve.⁴ However, for parallel shifts of a moderately flat yield curve, duration does a reasonable job of measuring price sensitivity between a conventional bond and a zero-coupon bond with the same duration.

4. A flat yield curve is assumed because duration is derived from formula (A2), which discounts all cash flows at the same rate.

Literature cited

- Branion, A. 1995. "The Government of Canada bond market since 1980." *Bank of Canada Review* (Autumn): 3-21.
- Côté, A., J. Jacob, J. Nelmes, and M. Whittingham. 1996. "Inflation expectations and Real Return Bonds." *Bank of Canada Review* (Summer): 41-53.
- Fabozzi, F. J. and T. D. Fabozzi. 1995. *The Handbook of Fixed Income Securities*. Fourth edition, Richard D. Irwin Inc.
- Macaulay, F. 1938. *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States Since 1856*. New York: National Bureau of Economic Research.

La duration Macaulay d'une obligation coupon zéro est toujours égale à son échéance. Ainsi, une obligation classique et une obligation coupon zéro ayant la même durée réagiront de façon similaire à de faibles variations de taux d'intérêt.

Malheureusement, la durée présente deux inconvénients : elle ne donne pas les résultats attendus dans le cas des obligations avec options enchâssées et elle suppose une courbe de rendement plate⁴. Toutefois, lorsqu'une courbe de rendement relativement plate se déplace sans changement de pente, la durée permet de mesurer raisonnablement bien la sensibilité du prix d'une obligation classique et d'une obligation coupon zéro ayant la même durée.

4. On suppose une courbe de rendement plate parce que la durée est dérivée de la formule (A2), qui actualise toutes les rentrées de fonds au même taux.

Ouvrages cités

- Branion, A. (1995). «Le marché des obligations du gouvernement canadien depuis 1980», *Revue de la Banque du Canada* (automne), p. 3-21.
- Côté, A., J. Jacob, J. Nelmes et M. Whittingham (1996). «Les attentes d'inflation et les obligations à rendement réel», *Revue de la Banque du Canada* (été), p. 41-53.
- Fabozzi, F. et T. D. Fabozzi (1995). *The Handbook of Fixed Income Securities*, 4^e édition, Richard D. Irwin Inc.
- Macaulay, F. (1938). *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States Since 1856*, National Bureau of Economic Research, New York.