

# La dynamique de la courbe de rendement des obligations du gouvernement canadien de 1986 à 2003

Grahame Johnson, département des Marchés financiers

- L'auteur présente une base de données historique sur les courbes de rendement journalier coupon zéro (échéance constante) des obligations du gouvernement canadien. Il examine le comportement et l'évolution de ces courbes au cours de l'ensemble de la période d'observation retenue, qui va de 1986 à 2003, et de deux sous-périodes, 1986-1996 et 1997-2003.
- Les écarts entre les prix du marché des obligations d'État et les prix générés par le modèle utilisé pour établir les courbes de rendement ont diminué de façon importante pendant la période d'observation, ce qui témoigne d'une évaluation plus cohérente des flux monétaires au fil du temps.
- Les rendements des obligations d'État se sont comportés de manière sensiblement différente durant les deux sous-périodes. D'après la quasi-totalité des mesures retenues, le marché de ces obligations semble être devenu plus « sûr » au cours de la deuxième sous-période, le degré de volatilité étant nettement moins prononcé. Les rendements excédentaires ont baissé légèrement après 1996, mais leur volatilité a chuté bien davantage, d'où une amélioration des rendements corrigés du risque.
- Les variations de la courbe de rendement au fil du temps peuvent s'expliquer presque entièrement par trois facteurs indépendants — le niveau, la pente et la courbure. L'importance relative de ces facteurs varie significativement d'une sous-période à l'autre.
- Contrairement à ce que supposent les hypothèses implicites de plusieurs modèles d'évaluation des produits financiers et de gestion du risque, les variations journalières de divers attributs représentatifs des courbes de rendement ne suivent pas une loi normale : peu importe l'attribut étudié, la distribution se caractérise par un nombre plus grand d'observations regroupées autour de la moyenne et un nombre plus élevé aussi de valeurs extrêmes que ce qu'implique l'hypothèse de normalité.

Le présent article<sup>1</sup> décrit une base de données historique que la Banque du Canada a créée sur les courbes de rendement coupon zéro des obligations du gouvernement canadien. Les taux d'intérêt coupon zéro (ou taux au comptant) jouent un rôle fondamental sur les marchés de titres à revenu fixe. Correspondant par définition au taux d'intérêt applicable à un flux monétaire unique arrivant à échéance à un moment précis (sans versement d'intérêts avant l'échéance), ces taux sont utilisés très fréquemment pour déterminer le prix et la structure d'un éventail de produits financiers et couvrir le risque lié à ces produits. Dans la plupart de ces cas, on peut se servir des taux au comptant calculés à partir des taux d'intérêt stipulés dans les contrats de dépôt bancaire et de la branche fixe des contrats de swap de taux d'intérêt. L'établissement de taux au comptant à l'aide de la courbe de rendement en question (appelée courbe de rendement des swaps) est assez simple, car à chaque échéance représentée sur la courbe correspond un rendement précis, et un seul<sup>2</sup>. Cependant, comme ils sont fondés sur les taux de crédits bancaires, ces taux au comptant ne sont pas vraiment exempts du risque de crédit. Un grand nombre d'applications exigent l'emploi d'un taux au comptant sans risque de crédit; l'utilisation de taux calculés d'après les courbes de rendement à échéance des swaps est alors contre-indiquée. Dans ces cas, une courbe des taux d'intérêt

1. Il s'agit d'un résumé d'une étude de Bolder, Johnson et Metzler (2004), qui contient une analyse beaucoup plus technique des résultats présentés ici.

2. Ron (2000) décrit en détail le mode de construction des courbes de rendement des swaps.

coupon zéro sans risque doit être générée à partir d'une courbe de rendement sous-jacente fondée sur des obligations d'État.

Il est toutefois plus difficile d'établir une courbe des taux au comptant d'après une courbe sous-jacente des rendements à échéance d'obligations d'État qu'à l'aide d'une courbe de rendement des swaps de taux d'intérêt. Le marché des obligations du gouvernement canadien se compose d'un grand nombre d'émissions dont les taux d'intérêt nominaux, les échéances et les rendements varient. Seule une faible proportion de ces émissions est négociée activement sur le marché secondaire, et il n'est pas rare que des flux monétaires tombant le même jour soient assortis de rendements différents<sup>3</sup>. Il n'existe donc pas un taux de rendement unique pour les obligations d'État à une date particulière, si bien qu'il faut recourir à des techniques numériques d'ajustement des courbes. Essentiellement, ces techniques consistent à estimer, au moyen d'un modèle mathématique, une courbe de rendement qui réduit au minimum l'écart entre les prix des obligations prévus par le modèle et les prix observés sur le marché. L'algorithme particulier qui est utilisé ici pour générer les courbes de rendement coupon zéro des obligations d'État au cours du temps est fondé sur le modèle à fonction spline exponentielle de Merrill Lynch présenté dans Li et coll. (2001). Dans ce modèle, une méthode numérique d'ajustement sert à estimer une fonction d'actualisation, à l'aide de laquelle est ensuite établi le prix de toutes les obligations d'État comprises dans l'échantillon. La courbe retenue en définitive est celle qui donne les plus faibles écarts entre les prix prévus par le modèle et les prix observés sur le marché. La dernière étape consiste à transformer la fonction d'actualisation en une courbe de rendement coupon zéro. Les paramètres de la courbe sont estimés à nouveau chaque jour ouvrable. Pour un exposé complet, consulter Bolder et Gusba (2002) et Bolder, Johnson et Metzler (2004).

Cet algorithme d'ajustement a été utilisé pour créer une base de données historique sur les courbes de rendement coupon zéro (échéance constante) à partir des cours de clôture journaliers des obligations du gouvernement canadien durant la période allant de janvier 1986 à mai 2003. Il existe certes des banques de données historiques sur la structure des taux d'intérêt (comme celle de McCulloch et Kwon)<sup>4</sup> pour le

3. Les flux monétaires ont souvent des rendements différents selon qu'ils représentent un paiement d'intérêts (coupon) ou un remboursement de principal (obligation résiduelle).

4. La base de données sur la courbe de rendement des obligations du Trésor américain peut être consultée dans le site Web de J. J. McCulloch à l'adresse <http://www.econ.ohio-state.edu/jhm/jhm.html>.

marché des titres du Trésor américain, mais, autant que nous sachions, la nôtre est la première banque de données du genre sur les taux coupon zéro canadiens qui soit du domaine public. Elle sera mise à jour régulièrement et librement accessible dans le site Web de la Banque du Canada.

---

*Cet algorithme d'ajustement a été utilisé pour créer une base de données historique sur les courbes de rendement coupon zéro (échéance constante).*

---

L'objet du présent article est à la fois de souligner la disponibilité de ces données et de mener une première analyse statistique en vue d'examiner le comportement et l'évolution des taux au comptant au cours de l'ensemble de la période d'observation ainsi que de deux sous-périodes distinctes. L'article porte plus précisément sur les points suivants :

- l'évolution en niveau de taux d'intérêt clés et de certains attributs représentatifs des courbes de rendement;
- les variations quotidiennes de ces taux d'intérêt et de ces attributs;
- la détermination d'un nombre relativement restreint de facteurs qui ont dicté le comportement de la courbe de rendement;
- le rendement total qu'on aurait obtenu en détenant des obligations de diverses échéances pendant une durée précise.

## La période d'observation

L'échantillon de données utilisé pour l'analyse présentée ici va de janvier 1986 à mai 2003 et comprend plus de 4 300 courbes de rendement quotidiennes. Durant ce laps de temps, toutefois, l'économie canadienne et les marchés de titres à revenu fixe du pays ont connu d'importantes transformations, si bien que cette période de plus de 17 ans peut être décomposée en deux sous-périodes. La première, qui s'étend de janvier 1986 à décembre 1996, se caractérise par :

- une inflation relativement forte et variable, particulièrement durant la première moitié de la sous-période, et des taux attendus à

long terme similaires, qui ont tardé à réagir à la réduction de l'inflation mesurée;

- d'importants besoins d'emprunt dans le secteur public;
- un marché obligataire fragmenté, comptant un grand nombre d'émissions de montant assez faible et non liquides;
- des restrictions pesant sur le démembrement des obligations et la reconstitution des divers flux monétaires composant ces dernières.

La deuxième sous-période, qui va de janvier 1997 à la fin de mai 2003, présente des caractéristiques fort différentes :

- l'inflation s'est établie à des niveaux bas et stables, tout comme les taux attendus;
- en 1996, le gouvernement canadien s'est mis à enregistrer des excédents budgétaires qui ont fortement réduit ses besoins nets d'emprunt;
- le ministère des Finances et la Banque du Canada ont adopté de nombreuses mesures afin d'améliorer l'efficacité du marché des obligations d'État (lancement d'un programme officiel d'émissions obligataires de référence caractérisé par des cibles explicites en volume et un rythme d'émission régulier; consultation en bonne et due forme des acteurs du marché, à intervalles périodiques, en vue de discuter des modifications à apporter éventuellement au programme de la gestion de la dette; mise sur pied d'un programme de rachat d'obligations, etc.);
- La Caisse canadienne de dépôt de valeurs limitée (CDS) a mis en œuvre plusieurs initiatives destinées à accroître l'efficacité du marché obligataire. Ainsi, en 1993, la CDS a établi des services de reconstitution et de mise en blocs et des numéros CUSIP<sup>5</sup> collectifs pour les obligations coupons détachés inscrites en compte. Cette mesure a rendu entièrement fongibles les coupons d'intérêt ayant la même date d'échéance, ce qui a intensifié l'arbitrage entre les émissions

5. CUSIP est l'acronyme de *Committee on Uniform Securities Identification Procedures*. Le numéro CUSIP est une combinaison de neuf caractères, alphabétiques et numériques, qui constitue un numéro d'identification unique pour un titre particulier. Les six premiers caractères désignent l'émetteur, les deux suivants précisent le type de titre, et le dernier chiffre sert au contrôle.

d'obligations chères et bon marché. En 1999, tous les flux monétaires de même type<sup>6</sup> assortis de la même date d'échéance sont devenus parfaitement fongibles et, en 2001, la règle limitant l'encours des titres pouvant être reconstitués a été abolie, de sorte que l'encours maximal d'une émission peut maintenant dépasser le montant émis initialement. Grâce à ces mesures, les flux monétaires dont l'émetteur et l'échéance sont les mêmes sont tous évalués de façon identique, quelle que soit l'émission sous-jacente;

- les stratégies de négociation informatisées et les méthodes d'évaluation quantitatives se sont répandues sur les marchés financiers, et les fonds de couverture, dont un grand nombre se spécialisent dans l'arbitrage sur la valeur relative des titres à revenu fixe, sont devenus des acteurs nettement plus importants sur les marchés de ces titres.

---

*Dans l'analyse qui suit, il sera tenu compte de fait de deux changements de régime distincts.*

---

Dans l'analyse qui suit, il sera tenu compte de fait de deux changements de régime distincts. Le premier, touchant les finances publiques et la situation macroéconomique, a pris la forme d'un ralentissement durable de l'inflation et d'un retour à l'équilibre budgétaire. Le deuxième consiste en une modification du fonctionnement des marchés de titres à revenu fixe proprement dits, sous l'influence notamment des changements apportés au profil des émissions, des mesures prises par la CDS et du rôle grandissant des stratégies de négociation quantitatives. Aucune date précise ne permet de rendre compte parfaitement de ces deux changements de régime. Le choix de janvier 1997 comme date charnière est quelque peu arbitraire; de fait, tous les changements énoncés précédemment ont eu lieu avant ou après cette date. L'essentiel à retenir est que la période allant de la seconde moitié

6. Pour être fongibles, les flux monétaires doivent être soit des paiements d'intérêts, soit des paiements de principal. Ces deux types de paiements ne sont pas encore fongibles entre eux.

des années 1980 au milieu des années 1990 présente des caractéristiques fort différentes de celles observées de la fin des années 1990 aux premières années de la décennie 2000 et que la plupart des changements étaient manifestes dès le début de 1997.

## Le modèle de calcul de la courbe de rendement

La base de données historique sur les courbes de rendement a été créée à l'aide d'un modèle mathématique d'ajustement permettant de trouver, pour un jour donné, la courbe de rendement coupon zéro qui réduit au minimum l'écart entre les prix des obligations prévus par le modèle et ceux effectivement observés sur le marché. L'examen de la taille des erreurs de prévision des prix associées aux courbes qui donnent le « meilleur ajustement » permet de se faire une idée de la cohérence des prix des obligations d'État à un moment déterminé. Si les titres d'État sont tous évalués de façon cohérente, de sorte que les flux monétaires ayant la même période à courir jusqu'à l'échéance ont le même taux de rendement (quelle que soit l'émission particulière d'obligations à laquelle ils se rattachent), le modèle devrait produire un excellent ajustement, assorti d'une très faible erreur de prévision des prix. Par contre, si les prix varient selon l'émission obligataire et que des flux monétaires ayant les mêmes échéances sont négociés à des taux de rendement nettement différents, les erreurs de prévision des prix devraient être relativement importantes. De surcroît, étant donné l'évolution des conditions du marché décrite à la section précédente, il serait raisonnable de s'attendre à une réduction de l'erreur de prévision au fil du temps, compte tenu des différents changements apportés en vue de rendre le marché des obligations d'État plus efficient.

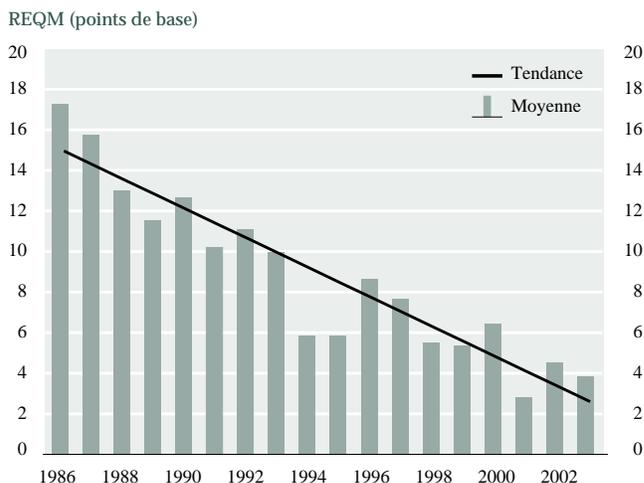
Le Graphique 1 montre l'évolution de la qualité de l'ajustement statistique du modèle<sup>7</sup>. Il présente la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) pour chaque année, ainsi que la tendance.

Manifestement, l'adéquation statistique du modèle s'est beaucoup améliorée au fil du temps. De 11,1 points de base sur l'ensemble de la première sous-période, l'erreur moyenne n'était plus que de 5,2 points pour la deuxième. Si l'on considère l'ensemble des titres du

7. La moyenne des racines de l'erreur quadratique moyenne calculées pour chaque jour est illustrée pour chaque année de la période d'observation. La racine de l'erreur quadratique moyenne est égale à la racine carrée de la somme des carrés des écarts de rendement.

Graphique 1

### Erreur moyenne de prévision des prix



gouvernement canadien, les rendements des obligations concordent maintenant bien davantage avec ceux prévus par une courbe de rendement théorique. Autrement dit, les divers flux monétaires correspondant à une même échéance sont maintenant évalués de façon plus cohérente, indépendamment de l'obligation à l'origine de ces flux ou du fait que ces derniers représentent un paiement d'intérêts ou un remboursement de principal. Bien qu'il soit difficile d'établir des relations de cause à effet, des changements de cette nature cadrent aussi bien avec les initiatives lancées par la CDS afin de rendre les flux monétaires semblables entièrement interchangeables qu'avec la généralisation des méthodes d'évaluation quantitatives et des stratégies de négociation informatisées sur les marchés de titres à revenu fixe.

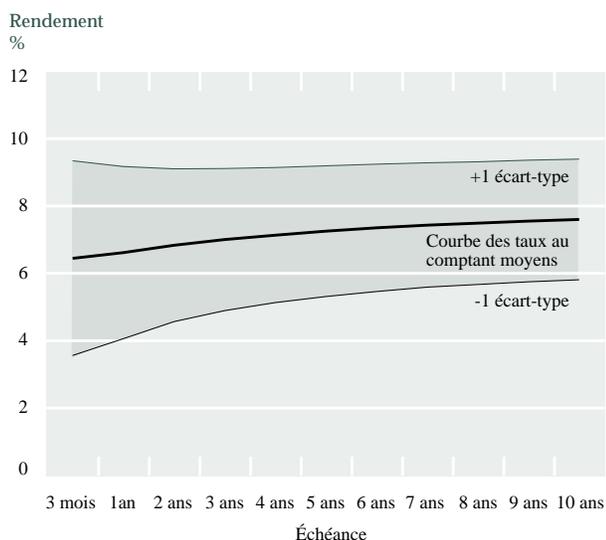
*Les divers flux monétaires correspondant à une même échéance sont maintenant évalués de façon plus cohérente.*

## Les caractéristiques générales des courbes de rendement

Lorsqu'on veut analyser l'évolution de la courbe de rendement, une première étape consiste à examiner l'aspect de la courbe des rendements moyens au cours

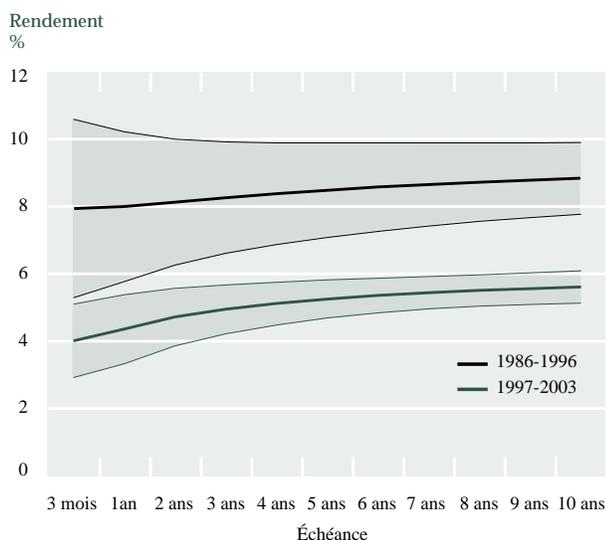
Graphique 2

**Courbe des taux au comptant moyens : janvier 1986 – mai 2003**



Graphique 3

**Courbes des taux au comptant moyens pour les deux sous-périodes**



de l'ensemble de la période d'observation, ainsi que durant chacune des deux sous-périodes. Les Graphiques 2 et 3 présentent ces trois courbes (entourées d'intervalles de confiance de  $\pm 1$  écart-type).

Comme le montre le Graphique 2, la pente de la courbe des taux au comptant moyens pour

l'ensemble de la période de référence est positive, le taux à trois mois étant d'environ 6,5 % et celui à dix ans d'à peu près 7,5 %. Toutefois, les variations autour de ces chiffres moyens sont très amples. Pour le taux à trois mois, les valeurs comprises dans l'intervalle de confiance de  $\pm 1$  écart-type vont de quelque 3,5 % à 9,5 %, tandis que, pour celui à dix ans, elles vont de 5,5 % à 9,5 %.

Le Graphique 3, qui fait état des courbes des taux au comptant moyens pour les deux sous-périodes, donne une idée de l'importance des modifications qu'ont affichées la forme, la pente et le niveau de la courbe de rendement d'une sous-période à l'autre.

Les deux courbes de rendement illustrées au Graphique 3 diffèrent sensiblement. La courbe obtenue pour la période antérieure à 1997 a une pente positive, le taux à trois mois s'établissant à environ 8 % et le taux à dix ans à quelque 9 %. La dispersion des rendements est très forte, l'intervalle de confiance de  $\pm 1$  écart-type allant de 5,5 % à 10,5 % pour le taux à trois mois et de 7,5 % à 10 % pour celui à dix ans.

Bien que la forme générale de la courbe de rendement soit semblable après 1996 à ce qu'elle était avant (la pente est positive dans les deux cas), deux différences sautent aux yeux. En premier lieu, le niveau général des taux de rendement est beaucoup plus bas durant la seconde sous-période — à tel point, en fait, que la limite supérieure de l'intervalle de confiance se situe nettement au-dessous de la limite inférieure de l'intervalle de confiance de la première sous-période. En deuxième lieu, la dispersion des rendements autour de la courbe des taux au comptant moyens est bien plus faible après 1996.

Les deux courbes présentées font ressortir visuellement les différences de structure des taux entre les deux sous-périodes, mais des tests statistiques ont également été appliqués à plusieurs attributs représentatifs des courbes de rendement afin de chiffrer les écarts observés entre les sous-périodes. Les attributs examinés ici sont le taux à trois mois, le taux à dix ans, la pente et le degré de courbure. La pente est définie comme la différence entre les taux à dix ans et à trois mois, et la courbure comme la différence entre le taux à six ans et la moyenne des taux à deux et à dix ans. Les tests statistiques confirment ce qu'illustrent les Graphiques 2 et 3. Les taux d'intérêt, tant à trois mois qu'à dix ans, étaient non seulement significativement plus faibles, mais aussi beaucoup moins variables au cours de la période postérieure à 1996. La pente de la courbe de rendement est nettement

Tableau 1

**Statistiques sommaires sur les courbes de rendement<sup>a</sup>**

Attribut de la courbe de rendement	Ensemble de la période d'observation			1986-1996			1997-2003		
	Moy. <sup>b</sup>	Min.	Max.	Moy. <sup>b</sup>	Min.	Max.	Moy. <sup>b</sup>	Min.	Max.
Taux à 3 mois	6,46 (2,9)	1,78	13,57	7,94 (2,8)	2,76	13,57	4,01 (1,1)	1,78	5,76
Taux à 10 ans	7,62 (1,8)	4,53	11,32	8,84 (1,1)	6,21	11,32	5,61 (0,5)	4,53	7,03
Pente	1,16 (1,7)	-3,21	4,08	0,90 (1,8)	-3,21	3,93	1,60 (1,2)	-35,37	407,47
Courbure	0,13 (0,20)	-0,47	0,82	0,09 (0,19)	-0,47	0,82	0,20 (0,1)	-0,20	0,73

a. Toutes les valeurs sont exprimées en pourcentage.

b. Les écarts-types sont indiqués entre parenthèses sous les moyennes.

plus raide pendant la seconde sous-période, tandis que le degré de courbure varie relativement peu d'une sous-période à l'autre. Les résultats détaillés sont présentés au Tableau 1.

## Variations et distributions des rendements journaliers

À la section précédente, nous avons examiné l'aspect des courbes de rendement moyennes au cours de la période étudiée et présenté les valeurs moyennes et les variances, en niveaux, de quatre attributs distincts des courbes. Les fluctuations journalières de ces valeurs moyennes et de ces variances pourraient cependant fournir des renseignements plus intéressants que les niveaux absolus, car ce sont ces variations qui sous-tendent le risque à court terme et le comportement des rendements dans le cas des obligations d'État. Les algorithmes d'évaluation des produits dérivés, les outils de gestion de portefeuille et les modèles de mesure du risque s'appuient presque tous sur certaines hypothèses de distribution des rendements à un horizon donné, la plus courante étant que les rendements suivent une loi normale. Étant donné que, dans le cas d'une obligation coupon zéro, les rendements à court terme sont pratiquement dictés par les fluctuations des taux d'intérêt, l'hypothèse d'une distribution normale des rendements équivaut à supposer qu'à court terme, les variations de taux obéissent elles aussi à une loi normale. S'il n'en était pas ainsi dans les faits, tout modèle fondé sur l'hypothèse de normalité pourrait produire des mesures inexactes des prix ou du risque.

Le Tableau 2 présente des données statistiques sur les variations journalières.

Deux observations importantes se dégagent du Tableau 2 :

- Si la moyenne des variations frôle zéro pour tous les attributs considérés, l'incertitude entourant ces variations est très élevée. Néanmoins, comme le révélaient déjà les données résumées au Tableau 1 dans le cas des niveaux absolus, cette variance est nettement plus faible après 1996.
- Quel que soit l'attribut examiné, il existe des valeurs fortement aberrantes, plusieurs observations s'écartant de 12 à 13 écarts-types de la moyenne dans chaque cas. En valeur absolue, l'écart des observations aberrantes à la moyenne est beaucoup plus faible pendant la deuxième sous-période, mais, mesuré en écarts-types, il est fort semblable à celui constaté avant 1997.

Ces valeurs extrêmes portent à croire que les variations journalières des taux ne suivent peut-être pas une loi normale. Loin d'être des cas uniques, ces valeurs extrêmes surviennent avec une certaine régularité. Sur l'ensemble de la période de référence et pour chacun des attributs mesurés, de 30 à 50 observations s'écartent de plus de quatre écarts-types de la moyenne. Des observations aussi extrêmes que celles relevées dans le Tableau 2 sont pour ainsi dire des impossibilités statistiques selon la loi normale<sup>8</sup>.

Tableau 2

**Statistiques sommaires sur les courbes de rendement : variations journalières<sup>a</sup>**

Attribut de la courbe de rendement	Ensemble de la période d'observation			1986-1996			1997-2003		
	Moy. <sup>b</sup>	Min.	Max.	Moy. <sup>b</sup>	Min.	Max.	Moy. <sup>b</sup>	Min.	Max.
Taux à 3 mois	-0,15 (14,5)	-120,6	188,3	-0,25 (17,3)	-120,7	188,3	0,03 (7,9)	-51,5	70,8
Taux à 10 ans	-0,12 (7,3)	-92,1	62,1	-0,11 (8,3)	-92,1	62,1	-0,13 (5,2)	-22,4	23,5
Pente	0,03 (15,0)	-176,3	93,1	0,14 (17,7)	-176,3	93,1	-0,16 (8,9)	-76,8	53,4
Courbure	0,00 (4,8)	-50,8	66,7	0,01 (5,8)	-50,8	66,7	-0,01 (2,4)	-33,3	32,7

a. Toutes les valeurs sont exprimées en points de base (centièmes de point de pourcentage).

b. Les écarts-types sont indiqués entre parenthèses sous les moyennes.

8. Ainsi, selon la loi normale, on ne s'attendrait à ce qu'une observation ne s'écarte de 12 écarts-types de la moyenne qu'une fois tous les 10<sup>20</sup> ans.

L'analyse est poussée plus loin au Graphique 4, où la distribution des variations journalières des taux pour chaque attribut de la courbe de rendement est comparée à une distribution normale théorique. L'examen du graphique confirme que les variations journalières des taux ne semblent pas obéir à une loi normale.

Par souci de simplicité, seules les distributions établies pour l'ensemble de la période d'observation ont été représentées. Il reste que les propriétés des distributions obtenues pour chacune des sous-périodes concordent avec celles des distributions complètes, aucune différence notable n'ayant été relevée d'une sous-période à l'autre. Comme le montre le Graphique 4, les distributions contiennent non seulement certaines valeurs extrêmes, mais aussi beaucoup plus d'observations proches de la moyenne que si elles suivaient une loi normale. Ces deux caractéristiques (un nombre relativement important de valeurs extrêmes et des observations fortement concentrées autour de la

moyenne) constituent des preuves manifestes de non-normalité; d'ailleurs, des tests statistiques formels mènent catégoriquement au rejet de l'hypothèse de normalité<sup>9</sup>.

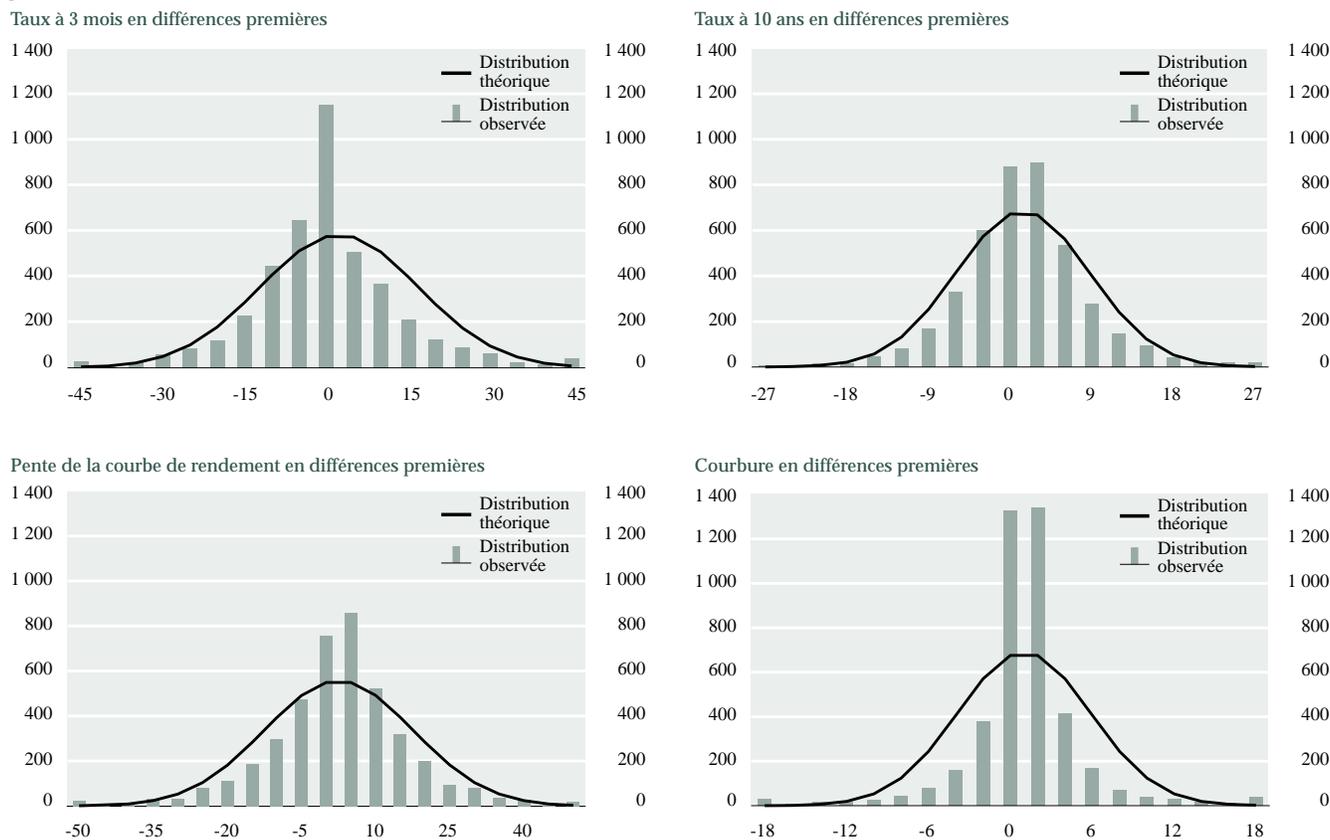
---

*Ces deux caractéristiques (un nombre relativement important de valeurs extrêmes et des observations fortement concentrées autour de la moyenne) constituent des preuves manifestes de non-normalité.*

---

9. Pour toutes les distributions, les probabilités de Jarque-Bera sont égales à 0,0000.

**Graphique 4**  
**Distributions de probabilité des variations journalières des taux**



La forme effectivement prise par ces distributions a des conséquences intéressantes en ce qui concerne les algorithmes d'évaluation, les modèles de gestion de portefeuille et les mesures du risque fondés sur l'hypothèse voulant que les variations des taux suivent une loi normale. Ces modèles donneraient lieu à une sous-estimation systématique de la probabilité d'une variation très faible des taux (le risque serait surestimé) ainsi qu'à une sous-estimation de la probabilité d'une très forte variation des taux (le risque serait sous-estimé). Sur les marchés des options, il semble toutefois y avoir compensation, au moins partielle, de ce phénomène par l'établissement de divers prix de levée des options qui tiennent compte de niveaux de volatilité implicite différents. Les options dont le prix de levée s'écarte beaucoup du prix pratiqué ont une volatilité implicite plus forte que celles dont le prix de levée est très proche du prix courant, ce qui revient à compenser le fait que les options profondément hors du cours sont plus susceptibles d'être exercées que ne l'indiqueraient certains modèles d'évaluation des options reposant sur des hypothèses de distribution normale centrée réduite. Il demeure néanmoins intéressant de se demander si des stratégies de négociation structurées précisément de façon à profiter de la tendance des taux à varier soit très peu, soit très fortement (comparativement à une loi normale) auraient été anormalement rentables<sup>10</sup>.

## Analyse en composantes principales

L'analyse en composantes principales a pour objet de décrire le comportement d'une série de variables aléatoires corrélées (ici, les taux au comptant pour diverses périodes à court terme) en fonction d'un nombre restreint de composantes principales non corrélées. Ce genre d'analyse permet d'isoler un nombre relativement faible de facteurs qui ont influé sur le comportement de la courbe de rendement coupon zéro au cours de l'ensemble de la période considérée. Parmi les nombreuses applications pratiques de cette forme d'analyse, l'une des plus importantes est sans doute la possibilité qu'elle donne de mieux se couvrir lorsqu'on détient un portefeuille d'obligations. Une fois qu'on a repéré un petit nombre de facteurs clés qui expliquent presque entièrement le risque associé à un portefeuille d'obligations précis, il est possible de

10. Un exemple de ce genre de stratégie consisterait à maintenir une position vendeur en options sur obligations ayant un prix de levée voisin du prix du marché, compensée par une position acheteur en options relativement hors du cours.

créer une réplique de ce portefeuille qui immunise ce dernier contre les chocs dus à ces facteurs. Pour tout portefeuille d'obligations d'une certaine complexité, cette technique offre une protection supérieure à celle des méthodes d'immunisation moins évoluées, telles que le simple appariement des durations.

Cette approche a été appliquée pour la première fois à l'étude du rendement des obligations par Litterman et Scheinkman (1991), qui ont découvert trois facteurs communs ayant eu une incidence sur le rendement de toutes les obligations du Trésor durant la période examinée; ces facteurs expliquaient, en moyenne, 98,4 % de la variance des rendements. Le premier facteur, qu'ils ont appelé niveau, englobe les chocs qui provoquent un déplacement à peu près parallèle de la courbe de rendement vers le haut ou vers le bas, tous les taux augmentant ou diminuant d'environ la même quantité. Le niveau était, de loin, le plus important facteur, représentant 89,5 % de la variance totale expliquée. Le deuxième facteur, dénommé pente puisqu'un choc positif dans ce cas entraîne une baisse des taux au comptant à court terme mais une hausse des taux à long terme, intervenait pour 8,5 % de la variance expliquée totale. Le troisième facteur, la courbure, englobe les chocs qui ont des effets de sens contraire sur les taux à court et long terme et sur ceux à moyen terme; une réduction des premiers conjuguée à un accroissement des seconds donne lieu à une accentuation de la courbure de la structure des taux, et vice-versa. Le facteur courbure était à l'origine de 2,0 % de la variance expliquée. L'application de ce modèle à l'analyse du comportement d'autres taux d'intérêt ayant produit des résultats semblables<sup>11</sup>, il est maintenant d'usage courant en finance de décrire les mouvements des courbes de rendement en fonction de trois facteurs sous-jacents, à savoir le niveau, la pente et la courbure.

Le Tableau 3 présente les résultats de l'analyse en composantes principales des courbes de rendement coupon zéro canadiennes pour l'ensemble de la période d'observation et pour les deux sous-périodes. À l'instar de Litterman et Scheinkman, on constate que les trois premiers facteurs expliquent en quasi-totalité la variabilité des taux au comptant au cours de la période étudiée. Le niveau est de loin le facteur qui pèse le plus lourd. Toutefois, la proportion de la

11. Par exemple, Buhler et Zimmermann (1996) obtiennent des résultats comparables pour les marchés suisse et allemand, tandis que Knez, Litterman et Scheinkman (1994) proposent un modèle à trois ou à quatre facteurs pour expliquer les rendements du marché monétaire américain.

Tableau 3

**Pourcentage de la variance expliquée**

Période	Facteur 1 Niveau	Facteur 2 Pente	Facteur 3 Courbure	Total
1986-1996	89,8	8,4	1,3	99,6
1997-2003	72,6	25,8	1,4	99,7
Ensemble de la période d'observation	83,1	15,2	1,4	99,6

variance totale expliquée par ce facteur diminue assez fortement durant la seconde sous-période. Le facteur venant en deuxième place, la pente, voit augmenter son rôle en conséquence : son pouvoir explicatif fait plus que tripler pendant la seconde sous-période. Ce changement indique que la dynamique de la courbe de rendement s'est modifiée considérablement au cours de l'ensemble de la période examinée. La variation en niveau des taux d'intérêt est un moins grand facteur de risque après 1996, alors que les modifications de la pente de la courbe gagnent en importance. Les fluctuations directement observées du niveau des taux demeurent certes le principal facteur de risque, mais le risque lié aux variations de la pente de la courbe triple durant la deuxième sous-période. Enfin, le facteur courbure explique une fraction assez faible, mais constante, de la variance au cours des deux sous-périodes.

*Les trois premiers facteurs expliquent en quasi-totalité la variabilité des taux au comptant au cours de la période étudiée.*

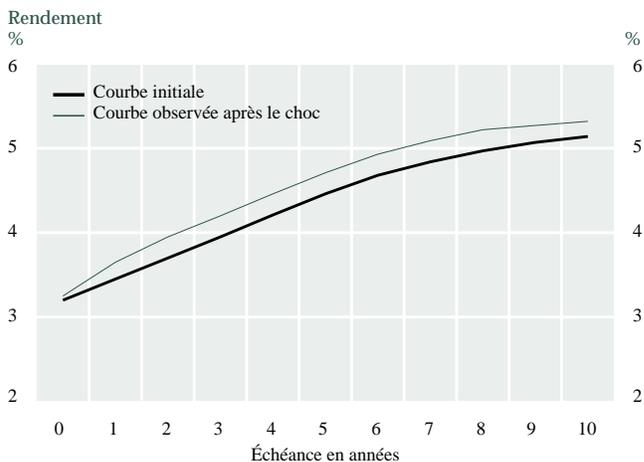
Le Graphique 5, qui illustre l'effet d'une variation de chacun des trois facteurs sur une courbe de rendement type, aide à comprendre l'influence de ces facteurs et montre pourquoi on les a nommés niveau, pente et courbure.

Le comportement des trois facteurs est fort semblable à celui que décrivent Litterman et Scheinkman. Le facteur niveau correspond à un déplacement à peu près parallèle des taux tout au long de la courbe; dans le cas du facteur pente, un choc positif fait baisser les taux à court terme, mais augmenter les taux à long

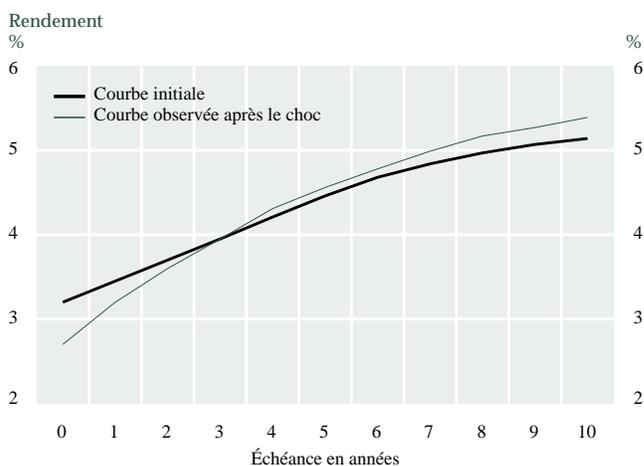
Graphique 5

**Effet d'une variation de chacun des facteurs (ou composantes principales)**

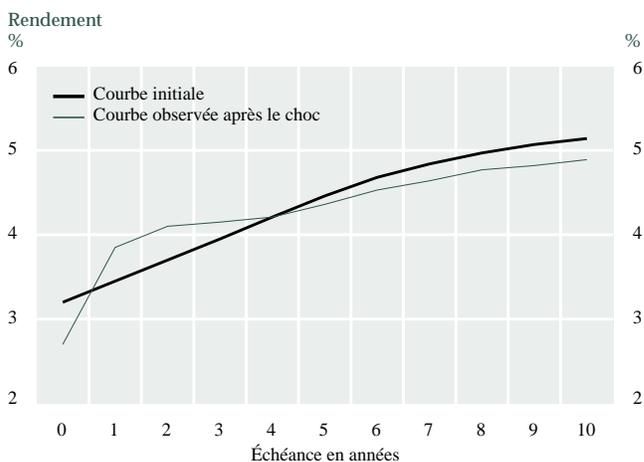
Niveau



Pente



Courbure



terme, tandis que, dans le cas du facteur courbure, il a pour effet de réduire les taux à très court et long terme, mais d'accroître les taux à moyen terme.

Les méthodes classiques de gestion du risque de taux d'intérêt mettent l'accent sur l'appariement des durations pour immuniser le portefeuille contre les déplacements parallèles de la courbe des taux. Cette stratégie de couverture immunise le portefeuille uniquement contre les variations du premier facteur (niveau). Or, si celles-ci représentent manifestement la source la plus importante de fluctuation des taux, une part importante du risque n'est pas couverte (au cours de la deuxième sous-période, l'immunisation n'aurait porté que sur environ 73 % de la variance totale des taux). Une stratégie de couverture plus complète consisterait à calculer la sensibilité d'un portefeuille d'obligations aux trois différents facteurs. Une fois cette sensibilité déterminée, il serait possible de créer un portefeuille de couverture qui compenserait l'exposition à ces facteurs. Pourvu qu'elle soit bien conçue, une telle stratégie protégerait contre plus de 99 % de la variabilité de la structure des taux. Ce genre de stratégie a fait l'objet d'un assez grand nombre de travaux de recherche; pour en savoir davantage, consulter Barber et Copper (1996), Golub et Tilman (1997) et Lardic, Priaulet et Priaulet (2003).

## Rendements sur la durée de détention

Selon l'hypothèse relative aux attentes qui sous-tend la structure des taux d'intérêt, les taux à long terme correspondent simplement à la moyenne des taux à court terme attendus majorée d'une prime de risque. Si l'on pose que cette prime de risque est nulle, les rendements anticipés des obligations coupon zéro de toute échéance sont égaux à un horizon donné (p. ex., l'achat d'une obligation à dix ans et sa revente dans l'année produisent le même rendement attendu que la détention d'une obligation à un an jusqu'à l'échéance)<sup>12</sup>. Si la prime de terme est positive, le rendement prévu des obligations à long terme est plus élevé à un horizon donné que celui des obligations à court terme. Ce rendement supplémentaire anticipé vient compenser le risque additionnel lié aux obligations à long terme, puisque leur rendement effectif est incertain.

12. La perte ou le gain en capital attendu de la vente du titre à plus longue échéance, à l'horizon en question, compenserait exactement la différence de taux d'intérêt entre les deux titres.

La série chronologique des courbes de rendement permet d'examiner plusieurs questions que soulève cette hypothèse<sup>13</sup>. Premièrement, nous avons analysé les données pour déterminer si des obligations d'échéances différentes fournissaient des rendements équivalents, en moyenne, pour une durée de détention particulière au cours de la période étudiée ou si certaines d'entre elles produisaient un rendement excédentaire. Deuxièmement, nous avons cherché à voir si les rendements procurés par la détention de titres à long terme étaient plus variables (c'est-à-dire si le risque était plus élevé) que ceux liés à la détention de titres à court terme; le cas échéant, il convenait d'établir si les obligations de certaines échéances produisaient systématiquement un meilleur rendement corrigé du risque que d'autres. Enfin, nous avons comparé les résultats sur les deux sous-périodes afin de savoir si le profil risque-rendement tout au long de la courbe s'était modifié après 1996.

Le rendement sur la durée de détention est défini comme le rendement total obtenu si l'on achète un titre en début de période et qu'on le détient pendant une durée déterminée, pour ensuite l'encaisser pour un montant connu (s'il est arrivé à échéance) ou le revendre sur le marché secondaire. Le rendement sur la durée de détention a été calculé à partir d'obligations coupon zéro échéant dans un, deux, cinq et dix ans et conservées pendant 180 jours. L'écart entre le rendement ainsi calculé et le rendement sans risque que l'on obtiendrait en achetant simplement une obligation à 180 jours et en la détenant jusqu'à l'échéance, c'est-à-dire le rendement excédentaire sur la durée de détention, est le résultat qui nous intéresse. Cette mesure permet en effet de tenir compte des variations du taux sans risque de référence au cours de la période examinée. Il s'agit d'un point important si l'on considère que, durant la période d'observation, les taux à court terme ont varié entre 2 % et 14 %; un rendement excédentaire de 10 % (par exemple) sur la durée de détention pourrait alors représenter aussi bien un bon résultat qu'un mauvais, selon le taux sans risque en vigueur.

Le Tableau 4 présente des statistiques sommaires au sujet des rendements excédentaires calculés sur la

13. Les conclusions susceptibles de découler de cet examen ne vaudraient cependant que pour la période étudiée. La taille de l'échantillon pourrait ne pas être suffisante pour permettre de tirer des conclusions à valeur générale.

Tableau 4

### Statistiques sommaires sur le rendement excédentaire pour une durée de détention de 180 jours

Obligation	Ensemble de la période d'observation (%)			1986-1996 (%)			1997-2003 (%)		
				Moy. <sup>a</sup>	Min.	Max.	Moy. <sup>a</sup>	Min.	Max.
	Moy. <sup>a</sup>	Min.	Max.						
Un an	0,61 (1,18)	-3,27	4,05	0,69 (1,40)	-3,27	4,05	0,51 (0,70)	-1,61	2,86
Deux ans	1,53 (3,57)	-11,10	12,53	1,69 (4,37)	-11,10	12,53	1,32 (2,20)	-3,57	8,13
Cinq ans	3,17 (8,35)	-28,24	26,18	3,46 (10,17)	-28,24	26,18	2,79 (5,35)	-11,58	15,86
Dix ans	4,89 (14,48)	-49,66	38,18	5,24 (17,48)	-49,66	38,18	4,45 (9,82)	-21,92	31,79

a. Les écarts-types sont indiqués entre parenthèses sous les moyennes.

durée de détention pour l'ensemble de la période d'observation et les deux sous-périodes.

Deux grandes conclusions se dégagent des résultats :

- L'importance et la variabilité des rendements excédentaires sur la durée de détention augmentent avec la période à courir jusqu'à l'échéance. Les obligations à long terme présentent un plus grand risque, mais elles offrent des rendements plus élevés, observation qui vaut aussi bien pour la première que pour la deuxième sous-période.
- Les rendements excédentaires sur la durée de détention paraissent plus bas entre 1997 et 2003, mais l'écart n'est pas statistiquement significatif. La volatilité des rendements, par contre, est significativement plus faible durant cette sous-période, l'écart-type du rendement excédentaire ne représentant alors généralement que la moitié de celui calculé pour la première sous-période.

Il semble donc que les obligations à long terme soient assorties d'une prime de risque destinée à compenser leur niveau plus élevé de risque (ou de variabilité des rendements) et que les rendements ainsi que leur variabilité aient diminué au cours de la seconde sous-période.

L'analyse ne permet toutefois pas de dire si le rendement supplémentaire produit par les titres ayant une échéance plus éloignée a suffi à compenser la variabilité supérieure de leur rendement. Il faut, pour cela, examiner les rendements corrigés du risque d'obligations d'échéances diverses.

L'une des façons les plus simples de calculer les rendements corrigés du risque de divers actifs

consiste à diviser le rendement excédentaire sur la durée de détention par la volatilité de ce rendement, en vue d'obtenir ce qu'on appelle le ratio de Sharpe (Sharpe, 1966 et 1975). Ce ratio a été calculé pour l'ensemble de la période d'observation ainsi que pour les deux sous-périodes; les résultats sont présentés au Tableau 5.

L'étude du tableau fait ressortir deux caractéristiques importantes. En premier lieu, les ratios de Sharpe diminuent à mesure que l'échéance s'éloigne, et ce, pour toutes les périodes retenues. Il semble, par conséquent, que le rendement supplémentaire obtenu en allongeant l'échéance du titre ne compense pas l'accroissement du risque. En deuxième lieu, dans le cas de toutes les échéances examinées, les ratios de Sharpe sont significativement plus élevés de 1997 à 2003, ce qui indique un meilleur rapport risque-rendement durant la seconde sous-période.

Lorsqu'on cherche à tirer des conclusions de l'analyse des rendements excédentaires sur la durée de détention, il est important de ne pas perdre de vue que ces rendements sont tous fondés sur des observations *ex post*. La majorité des chocs qui ont eu lieu entre 1986 et 2003 ont fait baisser les taux davantage qu'on aurait pu raisonnablement le prévoir *ex ante* (comme en témoignent les rendements significativement plus faibles après 1996), si bien que les titres à revenu fixe à échéance plus longue ont produit des rendements élevés. En ce sens, les rendements excédentaires *ex post* sur la durée de détention ne sont probablement pas représentatifs des rendements qui étaient attendus *ex ante*, et ils ne devraient pas non plus être considérés comme indicatifs des rendements à prévoir dans l'avenir. En règle générale, lorsqu'il y a un changement de régime, les observations *ex post* diffèrent sensiblement de ce qui était (ou devrait être) attendu *ex ante*.

Tableau 5

### Ratios de Sharpe

Obligation	Ensemble de la période d'observation (%)			1986-1996			1997-2003		
				Rend. excéd. moyen (%)	Écart-type (%)	Ratio de Sharpe	Rend. excéd. moyen (%)	Écart-type (%)	Ratio de Sharpe
	Rend. excéd. moyen (%)	Écart-type (%)	Ratio de Sharpe						
Un an	0,61	1,18	0,52	0,69	1,40	0,49	0,51	0,70	0,73
Deux ans	1,53	3,57	0,43	1,69	4,37	0,39	1,32	2,20	0,60
Cinq ans	3,17	8,35	0,38	3,46	10,17	0,34	2,79	5,35	0,52
Dix ans	4,89	14,48	0,34	5,24	17,48	0,30	4,45	9,82	0,45

## Conclusions

Le présent article donne un aperçu assez général du comportement des courbes de rendement coupon zéro des obligations du gouvernement canadien sur une période d'environ 17 ans et demi. L'analyse repose sur ce que nous croyons être la première série chronologique des courbes de rendement coupon zéro (échéance constante) des obligations du gouvernement canadien accessible au public. Quatre grandes conclusions se dégagent des résultats présentés ici.

Premièrement, l'écart entre les prix des obligations d'État sur le marché et les prix prévus au moyen du modèle de calcul de la courbe de rendement s'est fortement atténué au cours de la période couverte par la base de données. Ce résultat incite à penser que l'évaluation d'émissions obligataires différentes est devenue moins idiosyncrasique et plus cohérente, autrement dit que les flux monétaires de même échéance sont évalués au même prix (taux de rendement), peu importe l'obligation sous-jacente.

Deuxièmement, d'après la quasi-totalité des mesures retenues, le marché des obligations d'État est devenu plus « sûr » durant la seconde partie de la période d'observation (1997-2003). S'il est impossible d'établir un lien de causalité direct, on observe que les nombreuses modifications décrites au début de l'article sur le plan de l'environnement économique et des finances publiques ont coïncidé avec une diminution marquée du niveau et de la volatilité des taux d'intérêt. De surcroît, si les rendements excédentaires produits par différentes obligations ont été un peu plus faibles durant la deuxième sous-période, leur volatilité a reculé encore davantage, d'où une amélioration des rendements corrigés du risque.

La troisième conclusion est que, comme pour les autres grands marchés obligataires, les variations de la

courbe de rendement des obligations du gouvernement canadien au cours de la période étudiée sont expliquées presque entièrement par trois facteurs, à savoir le niveau, la pente et la courbure. La proportion totale de la variance expliquée est certes demeurée très stable sur l'ensemble de la période (se situant entre 99,0 % et 99,9 %), mais l'importance relative des trois facteurs a sensiblement varié.

Enfin, parmi les attributs de la courbe de rendement examinés, aucun ne présentait des variations journalières dont la distribution suivait une loi normale. Toutes les distributions se caractérisaient par un nombre beaucoup plus grand d'observations regroupées autour de la moyenne et un nombre bien plus élevé aussi de valeurs extrêmes que ce qu'implique l'hypothèse de normalité. Le comportement de la courbe de rendement au cours de la période d'observation pourrait être qualifié de généralement stable, avec cependant des variations extrêmes par moments. Il convient d'en tirer les conclusions qui s'imposent concernant le grand nombre de modèles de gestion de portefeuille, de mesure du risque et d'évaluation des produits dérivés qui sont fondés sur une hypothèse de normalité des rendements obligataires. Cette hypothèse ne se vérifie manifestement pas au fil du temps.

La base de données historique sur les courbes de rendement journalier coupon zéro (échéance constante) des obligations du gouvernement canadien peut être consultée dans le site Web de la Banque du Canada à l'adresse [http://www.banqueducanada.ca/fr/courbe\\_rendement-f.htm](http://www.banqueducanada.ca/fr/courbe_rendement-f.htm).

---

## Ouvrages et articles cités

Barber, J., et M. Copper (1996). « Immunization Using Principal Component Analysis », *Journal of Portfolio Management*, vol. 23, n° 1, p. 99-105.

Bolder, D., et S. Gusba (2002). « Exponentials, Polynomials, and Fourier Series: More Yield Curve Modelling at the Bank of Canada », document de travail n° 2002-29, Banque du Canada.

Bolder, D., G. Johnson et A. Metzler (2004). « An Empirical Analysis of the Canadian Term Structure of Zero-Coupon Rates », document de travail n° 2004-48, Banque du Canada.

## Ouvrages et articles cités (suite)

- Buhler, A., et H. Zimmermann (1996). « A Statistical Analysis of the Term Structure of Interest Rates in Switzerland and Germany », *Journal of Fixed Income*, vol. 6, n° 3, p. 55-67.
- Golub, B., et L. Tilman (1997). « Measuring Yield Curve Risk Using Principal Components Analysis, Value at Risk, and Key Rate Durations », *Journal of Portfolio Management*, vol. 23, n° 4, p. 72-84.
- Knez, P., R. Litterman et J. Scheinkman (1994). « Explorations into Factors Explaining Money Market Returns », *Journal of Finance* (décembre), p. 1861-1882.
- Lardic, S., P. Priaulet et S. Priaulet (2003). « PCA of Yield Curve Dynamics: Questions of Methodologies », *Journal of Bond Trading & Management*, vol. 1, n° 4, p. 327-349.
- Li, B., E. DeWetering, G. Lucas, R. Brenner et A. Shapiro (2001). « Merrill Lynch Exponential Spline Model », document de travail, Merrill Lynch.
- Litterman, R., et J. Scheinkman (1991). « Common Factors Affecting Bond Returns », *Journal of Fixed Income*, vol. 1, n° 1, p. 54-61.
- Ron, U. (2000). « A Practical Guide to Swap Curve Construction », document de travail n° 2000-17, Banque du Canada.
- Sharpe, W. (1966). « Mutual Fund Performance », *Journal of Business*, vol. 39, n° 1, p. 119-138.
- (1975). « Adjusting for Risk in Portfolio Performance Measurement », *Journal of Portfolio Management*, vol. 1, n° 2, p. 29-34.

